



XIX JUNIOR BALKAN MATHEMATICAL OLYMPIAD  
Belgrade, Serbia

19<sup>th</sup> Junior Balkan Mathematical Olympiad  
June 24-29, 2015, Belgrade, Serbia

Language: *Serbian*  
Петак, 26. јун 2015. године

1. Одреди све просте бројеве  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и природне бројеве  $k$  који задовољавају једначину

$$a^2 + b^2 + 16c^2 = 9k^2 + 1.$$

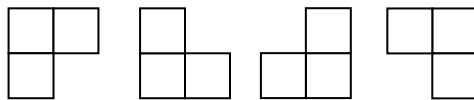
2. Нека су  $a$ ,  $b$ ,  $c$  позитивни реални бројеви такви да је  $a + b + c = 3$ . Одреди најмању (минималну) вредност коју може имати израз

$$A = \frac{2-a^3}{a} + \frac{2-b^3}{b} + \frac{2-c^3}{c}.$$

3. Нека је  $ABC$  оштроугли троугао. Праве  $l_1$  и  $l_2$  су нормалне на  $AB$  у тачкама  $A$  и  $B$ , редом. Нека је тачка  $M$  средиште дужи  $AB$ . Нормале повучене из тачке  $M$  на праве  $AC$  и  $BC$  секу  $l_1$  и  $l_2$  у тачкама  $E$  и  $F$ , редом. Ако је  $D$  пресек правих  $EF$  и  $MC$ , докажи да је

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle EMF.$$

4. L-фигура је фигура која може да има један од четири облика са слике (свака фигура се састоји од 3 јединична квадрата):



Дата је табла  $5 \times 5$ , која се састоји од 25 јединичних квадрата, природан број  $k \leq 25$  и неограничен број L-фигура.

Два играча, А и В, играју следећу игру: Игру почиње играч А. Играчи наизменично боје истом бојом по један јединични квадрат на табли који претходно није обојен. Игра је завршена када се обоји укупно  $k$  јединичних квадрата.

Кажемо да L-фигуре *добро* прекривају необојене јединичне квадрате на табли ако се не преклапају и ако свака од њих покрива тачно три необојена јединична квадрата на табли.

Играч В побеђује ако свако *добро* прекривање L-фигурама оставља непрекривена најмање три необојена јединична квадрата. Одреди најмању могућу вредност за  $k$  за коју играч В има победничку стратегију.

Време за израду: 4 сата и 30 минута  
Сваки задатак се бодује са 10 поена