ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКЕ 2017/2018. ГОДИНЕ

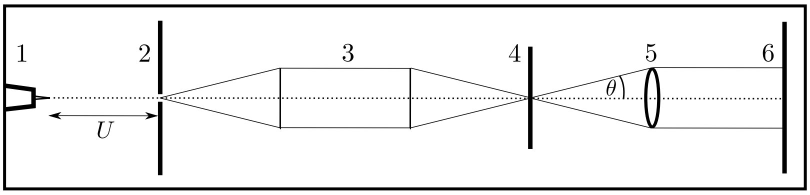
Друштво физичара Србије и Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије

IV разред

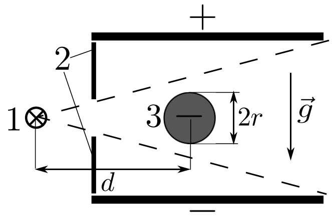
ЗАДАЦИ – ФЕРМИОНСКА КАТЕГОРИЈА*

ОКРУЖНИ НИВО
3. март 2018.

1. Једно од најбитнијих својстава микроскопа је моћ разлагања d, односно најмање растојање између два тачкаста објекта које микроскоп може да разложи. Ова величина се може проценити помоћу Абеове формуле $d = \frac{\lambda}{\sin\theta}$, где је λ таласна дужина зрачења које се користи, а θ половина угла конуса зрачења које пада на објектив. Код оптичких микроскопа моћ разлагања је ограничена таласном дужином видљиве светлости, па су зато конструисани електронски микроскопи код којих се као зрачење уместо светлости користе електрони. На слици 1 је приказана схема електронског микроскопа. Унутар микроскопа је вакуум, а извор електрона је усијана нит на високом негативном потенцијалу. Електрони који излећу са нити се усмеравају ка аноди у којој се налази мали отвор. Сноп електрона који прођу кроз отвор се фокусира помоћу електричних и магнетних поља, затим пролази кроз узорак који се посматра, при чему се део електрона апсорбује, и на крају пада на екран где се појављује увећани лик узорка. Проценити моћ разлагања уколико је разлика потенцијала између усијане нити и аноде $U = 200\,\mathrm{kV}$, а $\theta = 1{,}0\cdot 10^{-2}\,\mathrm{rad}$. **(20 поена)**



Слика 1: Схема електронског микроскопа; 1–извор електрона, 2–анода, 3–фокусирање помоћу електричних и магнетних поља, 4–узорак, 5–објектив, 6–екран.



Слика 2: Схема експеримента; 1–тачкасти извор, 2–апертура, 3–опиљак бизмута, $\vec{g}$–убрзање силе Земљине теже.

2. Електрон се налази у бесконачно дубокој једнодимензионалној потенцијалној јами правоугаоног потенцијалног профила. Највећа таласна дужина фотона чија апсорпција може да изазове прелаз између нека два стационарна стања електрона је $\lambda_{\max} = 9{,}1\,\mu\mathrm{m}$. Одредити ширину јаме L. **(20 поена)**

3. (*Млади физичар 97*) Гимнастичарка је провукла руку кроз танки хомогени обруч полупречника R и држи га у положају стабилне равнотеже у вертикалној равни нормалној на руку. Сматрајући да се рука гимнастичарке може апроксимирати непокретним цилиндром полупречника r, одредити период малих осцилација обруча у поменутој равни ако између обруча и руке нема трења. Интензитет убрзања силе Земљине теже је g. **(20 поена)**

4. У топлотно изолованом суду занемарљивог топлотног капацитета налази се $m_i = 100\,\mathrm{g}$ леда температуре $t_i = -10{,}0°\mathrm{C}$. У суд се уведе $m_w = 200\,\mathrm{g}$ воде температуре $t_w = 20{,}0°\mathrm{C}$, а потом сачека довољно дуго да се успостави равнотежно стање. Одредити успостављену температуру t у суду, као и масе воде m'_w и леда m'_i у успостављеном стању. Специфични топлотни капацитет воде је $c_w = 4{,}20\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg\cdot K}}$, специфични топлотни капацитет леда је $c_i = 2{,}10\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg\cdot K}}$, специфична топлота топљења леда је $\lambda_i = 0{,}330\,\frac{\mathrm{MJ}}{\mathrm{kg}}$, а температура топљења леда $t_0 = 0^0\mathrm{C}$. **(20 поена)**

5. Један од експеримената који је потврдио корпускуларну природу електромагнетног зрачења извели су Јофе и Добронравов 1925. године. Негативно наелектрисан опиљак бизмута уравнотежи се у вертикалној равни између плоча кондензатора, видети слику 2. Електрично поље у простору између плоча кондензатора се не мења у времену. На растојању $d = 2{,}0\,\mathrm{cm}$ од опиљка постави се изотропни тачкасти извор монохроматског електромагнетног зрачења таласне дужине $\lambda = 124\,\mathrm{pm}$. Апертура осигурава да зрачење које пада на опиљак долази директно из извора (без евентуалних рефлексија на плочама кондензатора). Посматрањем кроз дурбин постављен нормално на правац извор светлости–опиљак, установљено је да неко време након почетка озрачивања опиљак излази из равнотежног положаја. Описани експеримент је понављан много пута и добијено је да се излазак из равнотежног положаја дешава у средњем након $\Delta t = 30\mathrm{min}$ од почетка озрачивања. Сматрати да је опиљак лопта полупречника $r = 30\,\mu\mathrm{m}$ и да опиљак интерагује са сваким фотоном који доспе до њега. Одредити снагу зрачења. **(20 поена)**

Приликом решавања задатака можете користити следеће бројне вредности универзалних физичких константи: Планкова константа $h = 6{,}626\cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$, брзина светлости у вакууму $c = 2{,}998\cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}$, елементарно наелектрисање $e = 1{,}602\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$, маса електрона $m_e = 9{,}11\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$.

Решења свих задатака треба јасно образложити и треба јасно навести све физичке законе и дефинисати све ознаке које се користе у решењу задатка.

*У фермионској категорији такмиче се ученици који похађају одељења која раде по програмима средњих стручних школа, уметничких школа и свих врста гимназија осим специјализованих гимназија за области математика и физика.

Задатке припремили: *Вељко Јанковић* и *Ана Худомал*, Институт за физику у Београду
Рецензент: *др Ненад Вукмировић*, Институт за физику у Београду
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *др Божидар Николић*, Физички факултет, Београд

ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКЕ 2017/2018. ГОДИНЕ

Друштво физичара Србије и Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије

IV разред

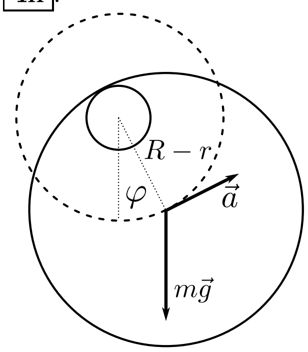
РЕШЕЊА – ФЕРМИОНСКА КАТЕГОРИЈА

ОКРУЖНИ НИВО
3. март 2018.

1. Таласна дужина електрона је $\lambda = \frac{h}{p}$ $\boxed{\text{3п}}$, где је p интензитет импулса. Због разлике потенцијала између извора и аноде, електрони стичу кинетичку енергију $T = eU$ $\boxed{\text{3п}}$. Како је $T = 200\,\mathrm{keV}$ упоредиво са енергијом мировања електрона $E_0 = m_e c^2 = 511\,\mathrm{keV}$ $\boxed{\text{3п}}$, интензитет импулса и кинетичка енергија су повезани релативистичком формулом $p = \frac{1}{c}\sqrt{T(T+2E_0)}$ $\boxed{\text{5п}}$. Из претходних једначина следи да је моћ разлагања микроскопа $d = \frac{hc}{\sin\theta\sqrt{eU(eU+2m_ec^2)}}$ $\boxed{\text{4п}}$, односно $d = 0{,}25\,\mathrm{nm}$ $\boxed{\text{2п}}$.

2. Стационарна стања електрона су пребројана квантним бројем $n = 1,2,\ldots$ при чему је енергија стања n једнака $E_n = \frac{h^2}{8m_eL^2}n^2$ $\boxed{\text{4п}}$. Ако апсорпција фотона таласне дужине λ доводи до преласка електрона из стационарног стања n у стационарно стање $m > n$ важи $\frac{hc}{\lambda} = E_m - E_n$ $\boxed{\text{5п}}$, односно $\lambda = \frac{8m_ecL^2}{h(m^2-n^2)}$ $\boxed{\text{1п}}$. Највећа таласна дужина фотона који може да изазове прелаз између нека два стационарна стања електрона се постиже када разлика m^2-n^2 узима најмању вредност. Тада је $m = 2$, $n = 1$, $m^2-n^2 = 3$ $\boxed{\text{6п}}$, па следи $L = \sqrt{\frac{3h\lambda}{8m_ec}}$ $\boxed{\text{2п}}$, односно након замене бројних вредности $L = 2{,}9\,\mathrm{nm}$ $\boxed{\text{2п}}$.

3. Обруч у сваком тренутку додирује руку, па се центар масе обруча креће по кругу полупречника $R-r$ око центра руке, видети слику 1. Ако је φ угао за који је центар масе померен из равнотежног положаја, према другом Њутновом закону важи $ma = -mg\sin\varphi$ $\boxed{\text{7п}}$, где је m маса обруча, а a тангенцијално убзање центра масе. У случају малих осцилација важи $\sin\varphi \approx \varphi$ $\boxed{\text{1п}}$. Угаоно убрзање центра масе је $\alpha = \frac{a}{R-r}$ $\boxed{\text{6п}}$, па се из претходних једначина добија $\alpha = -\frac{g}{R-r}\varphi$ $\boxed{\text{2п}}$. Пошто важи $\alpha = -\omega^2\varphi$, следи да је кружна фреквенција малих осцилација $\omega = \sqrt{\frac{g}{R-r}}$, одакле је период $T = 2\pi\sqrt{\frac{R-r}{g}}$ $\boxed{\text{4п}}$.



Слика 1: уз решење задатка 3.

4. Количина топлоте коју би вода масе m_w отпустила приликом хлађења од почетне температуре t_w до температуре t_0 је $Q_w = m_wc_w(t_w - t_0)$ и износи $Q_w = 16{,}8\,\mathrm{kJ}$, док је количина топлоте коју би вода температуре t_0 и масе m_w отпустила приликом преласка у лед температуре t_0 једнака $Q'_w = m_w\lambda_i$ и износи $Q'_w = 66\mathrm{kJ}$ $\boxed{\text{1п}}$. Количина топлоте коју би лед масе m_i примио приликом загревања од почетне температуре t_i до температуре t_0 је $Q_i = m_ic_i(t_0 - t_i)$ и износи $Q_i = 2{,}1\,\mathrm{kJ}$, док је количина топлоте коју би лед масе m_i и температуре t_0 примио приликом преласка у воду температуре t_0 једнака $Q'_i = m_i\lambda_i$ и износи $Q'_i = 33\,\mathrm{kJ}$ $\boxed{\text{1п}}$. Пошто је $Q_i + Q'_i > Q_w$, у успостављеном стању се сигурно не налази само вода $\boxed{\text{3п}}$. Пошто је $Q_i < Q_w + Q'_w$, у успостављеном стању се сигурно не налази само лед $\boxed{\text{3п}}$. Дакле, успоставља се стање у којем постоје и вода и лед, а успостављена температура је $t = 0^\circ\mathrm{C}$ $\boxed{\text{2п}}$. Због $Q_w > Q_i$, маса Δm леда ће прећи у воду при чему важи $Q_w = Q_i + \Delta m\,\lambda_i$ $\boxed{\text{5п}}$, одакле је $\Delta m = \frac{m_wc_w(t_w-t_0)-m_ic_i(t_0-t_i)}{\lambda_i}$ $\boxed{\text{1п}}$. Маса воде у успостављеном стању је $m'_w = m_w + \frac{m_wc_w(t_w-t_0)-m_ic_i(t_0-t_i)}{\lambda_i}$ $\boxed{\text{1п}}$ и износи $m'_w = 245\,\mathrm{g}$ $\boxed{\text{1п}}$, док је маса леда у успостављеном стању $m'_i = m_i - \frac{m_wc_w(t_w-t_0)-m_ic_i(t_0-t_i)}{\lambda_i}$ $\boxed{\text{1п}}$ и износи $m'_i = 55{,}5\,\mathrm{g}$ $\boxed{\text{1п}}$.

5. У равнотежном положају, сила Земљине теже је уравнотежена електричном силом која делује на наелектрисани опиљак. Излазак опиљка из равнотежног положаја након почетка озрачивања се дешава услед фотоелектричног ефекта, при чему један упадни фотон изазива губитак једног електрона $\boxed{\text{3п}}$. Приметимо да је енергија фотона $\frac{hc}{\lambda} = 10\,\mathrm{keV}$ значајно већа од излазног рада који за све метале износи неколико eV $\boxed{\text{1п}}$. Ако извор емитује n фотона у јединици времена равномерно у свим правцима, до опиљка стижу само они фотони који бивају емитовани у просторни угао $\Omega_{\mathrm{Bi}} = \frac{\pi r^2}{d^2}$ $\boxed{\text{3п}}$. Стога је број фотона који у јединици времена падају на опиљак једнак $n_{\mathrm{Bi}} = n\,\frac{\Omega_{\mathrm{Bi}}}{4\pi}$ $\boxed{\text{3п}}$. Средњи број фотона који за време Δt стигну до опиљка је $\Delta N = n_{\mathrm{Bi}}\Delta t$ $\boxed{\text{3п}}$. Према услову задатка, након времена Δt апсорбује се у средњем један фотон, тако да је $\Delta N = 1$ $\boxed{\text{2п}}$. Снага извора је $P = n\cdot\frac{hc}{\lambda}$ $\boxed{\text{1п}}$. Из претходних једначина онда следи $P = \frac{4d^2}{r^2\Delta t}\cdot\frac{hc}{\lambda}$ $\boxed{\text{2п}}$, односно након замене бројних вредности $P = 1{,}6\cdot10^{-12}\,\mathrm{W}$ $\boxed{\text{2п}}$.

Задатке припремили: *Вељко Јанковић* и *Ана Худомал*, Институт за физику у Београду
Рецензент: *др Ненад Вукмировић*, Институт за физику у Београду
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *др Божидар Николић*, Физички факултет, Београд

ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКЕ 2017/2018. ГОДИНЕ

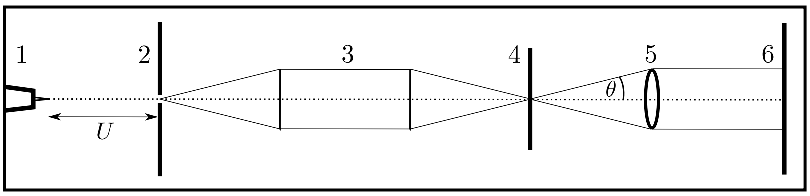
Друштво физичара Србије и Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије

IV разред

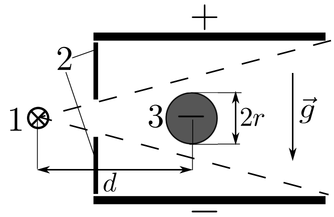
ЗАДАЦИ – БОЗОНСКА КАТЕГОРИЈА*

ОКРУЖНИ НИВО
3. март 2018.

1. Једно од најбитнијих својстава микроскопа је моћ разлагања d, односно најмање растојање између два тачкаста објекта које микроскоп може да разложи. Ова величина се може проценити помоћу Абеове формуле $d = \frac{\lambda}{\sin\theta}$, где је λ таласна дужина зрачења које се користи, а θ половина угла конуса зрачења које пада на објектив. Код оптичких микроскопа моћ разлагања је ограничена таласном дужином видљиве светлости, па су зато конструисани електронски микроскопи код којих се као зрачење уместо светлости користе електрони. На слици 1 је приказана схема електронског микроскопа. Унутар микроскопа је вакуум, а извор електрона је усијана нит на високом негативном потенцијалу. Електрони који излећу са нити се усмеравају ка аноди у којој се налази мали отвор. Сноп електрона који прођу кроз отвор се фокусира помоћу електричних и магнетних поља, затим пролази кроз узорак који се посматра, при чему се део електрона апсорбује, и на крају пада на екран где се појављује увећани лик узорка. Проценити моћ разлагања уколико је разлика потенцијала између усијане нити и аноде $U = 200\,\mathrm{kV}$, а $\theta = 1{,}0 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{rad}$. **(20 поена)**



Слика 1: Схема електронског микроскопа; 1–извор електрона, 2–анода, 3–фокусирање помоћу електричних и магнетних поља, 4–узорак, 5–објектив, 6–екран.



Слика 2: Схема експеримента; 1–тачкасти извор, 2–апертура, 3–опиљак бизмута, $\vec{g}$–убрзање силе Земљине теже.

2. Један од експеримената који је потврдио корпускуларну природу електромагнетног зрачења извели су Јофе и Добронравов 1925. године. Негативно наелектрисан опиљак бизмута уравнотежи се у вертикалној равни између плоча кондензатора, видети слику 2. Електрично поље у простору између плоча кондензатора се не мења у времену. На растојању $d = 2{,}0\,\mathrm{cm}$ од опиљка постави се изотропни тачкасти извор монохроматског електромагнетног зрачења таласне дужине $\lambda = 124\,\mathrm{pm}$. Апертура осигурава да зрачење које пада на опиљак долази директно из извора (без евентуалних рефлексија на плочама кондензатора). Посматрањем кроз дурбин постављен нормално на правац извор светлости–опиљак, установљено је да неко време након почетка озрачивања опиљак излази из равнотежног положаја. Описани експеримент је понављан много пута и добијено је да се излазак из равнотежног положаја дешава у средњем након $\Delta t = 30\mathrm{min}$ од почетка озрачивања. Сматрати да је опиљак лопта полупречника $r = 30\,\mu\mathrm{m}$ и да опиљак интерагује са сваким фотоном који доспе до њега. Одредити снагу зрачења. **(20 поена)**

3. Електрон се налази у бесконачно дубокој једнодимензионалној потенцијалној јами ширине L која заузима област $0 \leq x \leq L$. Таласна функција која описује стање електрона је облика $\psi(x) = A\left(b_1 + \frac{x}{L}\right)\left(b_2 - \frac{x}{L}\right)\left(1 - 2\frac{x}{L}\right)$, где је A позитивна константа одговарајућих димензија, док $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.
   (а) Израчунати A, b_1 и b_2. **(8 поена)**
   (б) У околини које тачке (којих тачака) се електрон највероватније налази? **(7 поена)**
   (в) Одредити вероватноћу налажења електрона у области $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$. **(5 поена)**

4. (*Млади физичар 97*) Гимнастичарка је провукла руку кроз танки хомогени обруч полупречника R и држи га у положају стабилне равнотеже у вертикалној равни нормалној на руку. Сматрајући да се рука гимнастичарке може апроксимирати непокретним цилиндром полупречника r, одредити период малих осцилација обруча у поменутој равни ако између обруча и руке нема проклизавања. Интензитет убрзања силе Земљине теже је g. **(20 поена)**

5. У топлотно изолованом суду занемарљивог топлотног капацитета налази се извесна количина леда температуре $t_i < t_0$ ($t_0 = 0°\mathrm{C}$). У суд се уведе извесна количина воде температуре $t_w > t_0$, а потом сачека довољно дуго да се успостави равнотежно стање. У зависности од вредности односа маса $\eta = \frac{m_w}{m_i}$ воде и леда пре њиховог мешања одредити
   - успостављену температуру у суду у функцији t_w, t_i, t_0 и η,
   - релативне промене $\frac{\Delta m_w}{m_w}$ и $\frac{\Delta m_i}{m_i}$ маса воде и леда у односу на почетне вредности у функцији t_w, t_i, t_0 и η.

   Специфичне топлотне капацитете воде c_w и леда c_i, као и специфичну топлоту топљења леда λ_i, сматрати познатим. **(20 поена)**

Приликом решавања задатака можете користити следеће бројне вредности универзалних физичких константи: Планкова константа $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$, брзина светлости у вакууму $c = 2{,}998 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}$, елементарно наелектрисање $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$, маса електрона $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$.

Решења свих задатака треба јасно образложити и треба јасно навести све физичке законе и дефинисати све ознаке које се користе у решењу задатка.

*У бозонској категорији такмиче се ученици који похађају одељења која раде по програмима специјализованих гимназија за област математика и физика.

Задатке припремили: *Вељко Јанковић* и *Ана Худомал*, Институт за физику у Београду
Рецензент: *др Ненад Вукмировић*, Институт за физику у Београду
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *др Божидар Николић*, Физички факултет, Београд

ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКЕ 2017/2018. ГОДИНЕ

Друштво физичара Србије и Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије

IV разред — **РЕШЕЊА – БОЗОНСКА КАТЕГОРИЈА** — **ОКРУЖНИ НИВО** **3. март 2018.**

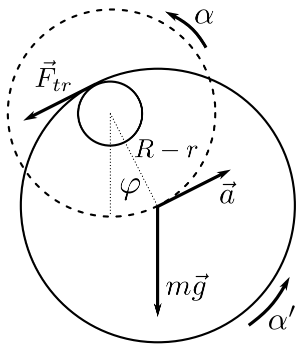
1. Таласна дужина електрона је $\lambda = \frac{h}{p}$ $\boxed{\text{3п}}$, где је p интензитет импулса. Због разлике потенцијала између извора и аноде, електрони стичу кинетичку енергију $T = eU$ $\boxed{\text{3п}}$. Како је $T = 200\,\mathrm{keV}$ упоредиво са енергијом мировања електрона $E_0 = m_e c^2 = 511\,\mathrm{keV}$ $\boxed{\text{3п}}$, интензитет импулса и кинетичка енергија су повезани релативистичком формулом $p = \frac{1}{c}\sqrt{T(T+2E_0)}$ $\boxed{\text{5п}}$. Из претходних једначина следи да је моћ разлагања микроскопа $d = \frac{hc}{\sin\theta\sqrt{eU(eU+2m_ec^2)}}$ $\boxed{\text{4п}}$, односно $d = 0{,}25\,\mathrm{nm}$ $\boxed{\text{2п}}$.

2. У равнотежном положају, сила Земљине теже је уравнотежена електричном силом која делује на наелектрисани опиљак. Излазак опиљка из равнотежног положаја након почетка озрачивања се дешава услед фотоелектричног ефекта, при чему један упадни фотон изазива губитак једног електрона $\boxed{\text{3п}}$. Приметимо да је енергија фотона $\frac{hc}{\lambda} = 10\,\mathrm{keV}$ значајно већа од излазног рада који за све метале износи неколико eV $\boxed{\text{1п}}$. Ако извор емитује n фотона у јединици времена равномерно у свим правцима, до опиљка стижу само они фотони који бивају емитовани у просторни угао $\Omega_{\mathrm{Bi}} = \frac{\pi r^2}{d^2}$ $\boxed{\text{3п}}$. Стога је број фотона који у јединици времена падају на опиљак једнак $n_{\mathrm{Bi}} = n\,\frac{\Omega_{\mathrm{Bi}}}{4\pi}$ $\boxed{\text{3п}}$. Средњи број фотона који за време Δt стигну до опиљка је $\Delta N = n_{\mathrm{Bi}}\Delta t$ $\boxed{\text{3п}}$. Према услову задатка, након времена Δt апсорбује се у средњем један фотон, тако да је $\Delta N = 1$ $\boxed{\text{2п}}$. Снага извора је $P = n\cdot\frac{hc}{\lambda}$ $\boxed{\text{1п}}$. Из претходних једначина онда следи $P = \frac{4d^2}{r^2\Delta t}\cdot\frac{hc}{\lambda}$ $\boxed{\text{2п}}$, односно након замене бројних вредности $P = 1{,}6\cdot 10^{-12}\,\mathrm{W}$ $\boxed{\text{2п}}$.

3. (а) Из граничних услова на крајевима јаме $\psi(0) = 0$ и $\psi(L) = 0$ $\boxed{\text{1п}}$, користећи $A \neq 0$, добија се систем једначина по b_1,b_2: $b_1 b_2 = 0$, $(b_1+1)(b_2-1) = 0$ $\boxed{\text{1п}}$. Систем има два решења, $b_1 = 0$, $b_2 = 1$ $\boxed{\text{1п}}$ и $b_1 = -1$, $b_2 = 0$ $\boxed{\text{1п}}$, при чему оба решења дају таласну функцију истог облика $\psi(x) = A\,\frac{x}{L}\left(1-\frac{x}{L}\right)\left(1-2\frac{x}{L}\right)$. Константа A се одређује из услова нормираности $\int_0^L dx\,\rho(x) = 1$, где је густина вероватноће $\rho(x) = |\psi(x)|^2$ $\boxed{\text{1п}}$. Преуређивањем услова нормираности следи
$$A^2\int_0^L dx\left(\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 6\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 13\left(\frac{x}{L}\right)^4 - 12\left(\frac{x}{L}\right)^5 + 4\left(\frac{x}{L}\right)^6\right) = 1 \ \boxed{\text{1п}},$$
па се након интеграције добија $A = \sqrt{\frac{210}{L}}$ $\boxed{\text{2п}}$.
(б) Електрон се са највећом вероватноћом налази у околини тачака у којима $\rho(x)$ достиже максимум. Из услова $\rho'(x) = 0$ се добија једначина
$$2A^2\frac{x}{L}\left(1-\frac{x}{L}\right)\left(1-2\frac{x}{L}\right)\left(6\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 6\,\frac{x}{L} + 1\right) = 0 \ \boxed{\text{2п}}$$
чија су решења $x_1 = 0$, $x_2 = \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)L$, $x_3 = \frac{1}{2}L$, $x_4 = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)L$ и $x_5 = L$ $\boxed{\text{2п}}$. На основу знака првог извода закључујемо да $\rho(x)$ расте за $x_1 < x < x_2$ и $x_3 < x < x_4$ и опада за $x_2 < x < x_3$ и $x_4 < x < x_5$ $\boxed{\text{2п}}$, па, узимајући у обзир да је $\rho(x_2) = \rho(x_4)$, следи да се електрон највероватније налази у околини тачака $x_2 \approx 0{,}211\,L$ и $x_4 \approx 0{,}789\,L$ $\boxed{\text{1п}}$.
(в) Пошто важи $\rho(x) = \rho(L-x)$, густина вероватноће је симетрична у односу на центар јаме (тачку $x = \frac{L}{2}$) $\boxed{\text{3п}}$, па је вероватноћа налажења електрона у области $0 \le x \le \frac{L}{2}$ једнака $1/2$ $\boxed{\text{2п}}$.

4. Обруч у сваком тренутку додирује руку, па се центар масе обруча креће по кругу полупречника $R-r$ око центра руке, одакле је $a = (R-r)\,\alpha$ $\boxed{\text{2п}}$, где је a тангенцијално, а α угаоно убрзање центра масе, видети слику 1. Пошто нема проклизавања, важи $a = \alpha' R$ $\boxed{\text{3п}}$, где је α' угаоно убрзање ротације обруча. Ако је φ угао за који је центар масе померен из равнотежног положаја, према другом Њутновом закону важи $ma = -mg\sin\varphi - F_{tr}$ $\boxed{\text{4п}}$, где је m маса обруча, а F_{tr} сила трења између руке и обруча. Једначина ротације обруча је $I\alpha' = RF_{tr}$ $\boxed{\text{3п}}$, где је $I = mR^2$ $\boxed{\text{1п}}$ момент инерције обруча. У случају малих осцилација важи $\sin\varphi \approx \varphi$ $\boxed{\text{1п}}$. Из претходних једначина се добија $\alpha = -\frac{g}{2(R-r)}\varphi$ $\boxed{\text{3п}}$. Пошто важи $\alpha = -\omega^2\varphi$, следи да је кружна фреквенција малих осцилација $\omega = \sqrt{\frac{g}{2(R-r)}}$, одакле је период $T = 2\pi\sqrt{\frac{2(R-r)}{g}}$ $\boxed{\text{3п}}$.

Задатке припремили: *Вељко Јанковић* и *Ана Худомал*, Институт за физику у Београду
Рецензент: *др Ненад Вукмировић*, Институт за физику у Београду
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *др Божидар Николић*, Физички факултет, Београд



Слика 1: уз решење задатка 4.

5. Решавање задатка је погодно одвојено спровести у неколико различитих случајева.

   (а) Ако је $m_w c_w(t_w - t_0) \geq m_i c_i(t_0 - t_i) + m_i\lambda_i$, односно $\eta \geq \frac{c_i(t_0-t_i)+\lambda_i}{c_w(t_w-t_0)}$, сав лед ће прећи у воду $\boxed{\textbf{2п}}$, а коначна температура смеше t се добија из $m_w c_w(t_w - t) = m_i c_i(t_0 - t_i) + m_i\lambda_i + m_i c_w(t - t_0)$ $\boxed{\textbf{2п}}$ и износи $t = t_0 + \frac{\eta c_w(t_w-t_0)-c_i(t_0-t_i)-\lambda_i}{(1+\eta)c_w}$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Релативне промене маса воде и леда су $\frac{\Delta m_w}{m_w} = \frac{1}{\eta}$, док је $\frac{\Delta m_i}{m_i} = -1$ $\boxed{\textbf{1п}}$.

   (б) Ако је $m_w c_w(t_w - t_0) + m_w\lambda_i \leq m_i c_i(t_0 - t_i)$, односно $\eta \leq \frac{c_i(t_0-t_i)}{c_w(t_w-t_0)+\lambda_i}$, сва вода ће прећи у лед $\boxed{\textbf{2п}}$, а коначна температура смеше t се добија из $m_w c_w(t_w - t_0) + m_w\lambda_i + m_w c_i(t_0 - t) = m_i c_i(t - t_i)$ $\boxed{\textbf{2п}}$ и износи $t = t_0 - \frac{c_i(t_0-t_i)-\eta(c_w(t_w-t_0)+\lambda_i)}{(1+\eta)c_i}$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Релативне промене маса воде и леда су $\frac{\Delta m_w}{m_w} = -1$, док је $\frac{\Delta m_i}{m_i} = \eta$. $\boxed{\textbf{1п}}$

   (в) Ако је $\frac{c_i(t_0-t_i)}{c_w(t_w-t_0)+\lambda_i} < \eta < \frac{c_i(t_0-t_i)+\lambda_i}{c_w(t_w-t_0)}$, смеша се састоји од воде и леда, при чему је један део леда прешао у воду или обрнуто $\boxed{\textbf{1п}}$. Температура смеше је $t = t_0$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Ако важи и $m_w c_w(t_w - t_0) > m_i c_i(t_0 - t_i)$, маса Δm_1 леда ће прећи у воду при чему важи $m_w c_w(t_w - t_0) = m_i c_i(t_0 - t_i) + \Delta m_1\lambda_i$ $\boxed{\textbf{2п}}$, тако да је $\frac{\Delta m_w}{m_w} = \frac{\Delta m_1}{m_w} = \frac{c_w(t_w-t_0)-c_i(t_0-t_i)/\eta}{\lambda_i}$, док је $\frac{\Delta m_i}{m_i} = -\frac{\Delta m_1}{m_i} = \frac{c_i(t_0-t_i)-\eta c_w(t_w-t_0)}{\lambda_i}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Ако, пак, важи и $m_w c_w(t_w - t_0) < m_i c_i(t_0 - t_i)$, маса Δm_1 воде ће прећи у лед, при чему се за релативне промене маса воде и леда добијају изрази истоветни оним у претходном случају $\boxed{\textbf{2п}}$.

Задатке припремили: *Вељко Јанковић* и *Ана Худомал*, Институт за физику у Београду
Рецензент: *др Ненад Вукмировић*, Институт за физику у Београду
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *др Божидар Николић*, Физички факултет, Београд