ДОДАТНО ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА УЧЕШЋЕ НА 33. БМО И 57. ММО

5. април 2016.

1. Низ полинома $P_n(x)$ је одређен условима

$$P_0(x) = x^3 - 4x \quad \text{и} \quad P_{n+1}(x) = P_n(1+x)P_n(1-x) - 1.$$

Доказати да је полином $P_{2016}(x)$ дељив полиномом x^{2016}. *(Душан Ђукић)*

2. Дат је квадрат $ABCD$ странице 4. Одредити највећи природан број k такав да, за ма какав распоред k тачака строго унутар квадрата $ABCD$, увек постоји квадрат странице 1, садржан у квадрату $ABCD$ (при чему му странице не морају бити паралелне страницама квадрата $ABCD$), у чијој строгој унутрашњости нема ниједне од посматраних k тачака. *(Бојан Башић)*

3. Означимо са $w(x)$ највећи непаран делилац природног броја x. Ако су a и b узајамно прости природни бројеви такви да су $a + w(b+1)$ и $b + w(a+1)$ степени двојке, доказати да су $a+1$ и $b+1$ такође степени двојке.
(Душан Ђукић)

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

РЕШЕЊА

1. За $n \geqslant 1$ из рекурентне везе следи да је полином P_n паран, па имамо

$$\begin{aligned} P_{n+2}(x) &= \left(P_n(2+x)P_n(-x)-1\right)\left(P_n(2-x)P_n(x)-1\right)-1 \\ &= P_n(2+x)P_n(2-x)P_n^2(x) - \left(P_n(2+x)+P_n(2-x)\right)P_n(x), \end{aligned}$$

па $P_n \mid P_{n+2}$. Притом је полином $P_n(2+x)+P_n(2-x)$ дељив са x (а самим тим и са x^2 јер је паран) ако $x-2 \mid P_n(x)$. Према томе, ако $x^k(x-2) \mid P_n(x)$ за неко $k \geqslant 2$, онда $x^{k+2}(x-2) \mid P_{n+2}(x)$.

Такође, P_0 је непаран полином и $P_2(x) = P_0(x+2)P_0(x-2)P_0(x)^2 + (P_0(x+2)+P_0(x-2))P_0(x)$, одакле следи да $x^2(x-2) \mid P_2(x)$. Сада једноставна индукција даје $x^n(x-2) \mid P_n(x)$ за $2 \mid n$ ($n \in \mathbb{N}$).

2. Одговор је $k = 15$.

Јасно је да $k = 15$ задовољава услове. Заиста, поделимо квадрат $ABCD$ на 16 јединичних квадрата; ма како да распоредимо 15 тачака унутар квадрата $ABCD$, бар један од ових јединичних квадрата неће садржати ниједну од ових тачака.

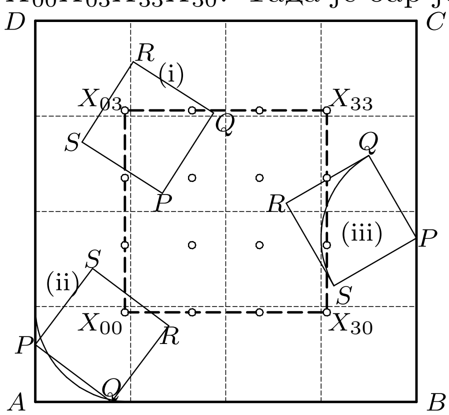
Покажимо да је $k < 16$. У квадрату са теменима $A(-2,-2)$, $B(2,-2)$, $C(2,2)$, $D(-2,2)$ означимо 16 тачака $X_{ij}(-a+i\cdot\frac{2a}{3}, -a+j\cdot\frac{2a}{3})$ за $i,j \in \{0,1,2,3\}$, где је $1 < a < \frac{3}{2\sqrt{2}}$. Да бисмо показали да сваки јединични квадрат $PQRS$ садржи неку од означених тачака, користићемо следеће једноставно тврђење.

Лема. Ако су E и F редом тачке на страницама BC и CD јединичног квадрата $ABCD$ такве да је $d(A, EF) = 1$, онда је $\sqrt{8}-2 \leqslant EF \leqslant 1$.

Доказ. Круг (A, AB) додирује дуж EF у некој тачки G, и притом је $EF = GE + GF = BE + DF$, одакле је $CE + CF + EF = 2$. Како је $EF \leqslant CE + CF \leqslant \sqrt{2}EF$, тврђење следи. $\square$

Довољно је размотрити следећа три случаја.

(i) Центар O квадрата $PQRS$ је у квадрату $X_{00}X_{03}X_{33}X_{30}$. Тада је бар једна од тачака X_{ij} на растојању од O не већем од $\frac{a\sqrt{2}}{2} < \frac{1}{2}$ и она лежи унутар квадрата $PQRS$.



(ii) Сва темена P, Q, R, S су ван квадрата $X_{00}X_{03}X_{33}X_{30}$. Нека су без смањења општости $P \in AD$ и $Q \in AB$ и нека је W тачка $(-1,-1)$. По леми је $d(X_{00}, PQ) < d(W, PQ) \leqslant 1$, па је X_{00} унутар квадрата $PQRS$.

(iii) Тачно једно од темена, рецимо R, је у квадрату $X_{00}X_{03}X_{33}X_{30}$. Нека без смањења општости P лежи на страници BC. Како је $d(P, X_{30}X_{33}) < 1$, из леме следи да је део праве $X_{30}X_{33}$ унутар квадрата $PQRS$ дужине веће од $\sqrt{8}-2 > a$, па он садржи бар једну означену тачку.

3. Користимо уобичајену ознаку $2^r \parallel x$ ако $2^r \mid x$ и $2^{r+1} \nmid x$. Пар (a,b) који задовољава услове зваћемо (k,l)-*решењем* ако $2^k \parallel a+1$ и $2^l \parallel b+1$.

Посматрајмо неко (k,l)-решење (a,b); нека је $a = 2^k c - 1$, $b = 2^l d - 1$ и

$$a + w(b+1) = 2^k c + d - 1 = 2^m \quad \text{и} \quad b + w(a+1) = 2^l d + c - 1 = 2^n. \qquad (*)$$

Ако је $c = 1$, онда је и $d = 1$ (и обрнуто), и тада је $(a,b) = (2^k - 1, 2^l - 1)$.

Претпоставимо да су $c, d > 1$. Из $(*)$ имамо $2^k \parallel d-1 = 2^k b'$ и $2^l \parallel c-1 = 2^l a'$ за неке непарне a', b', па замена у $(*)$ даје $2^l a' + b' + 1 = 2^{m-k}$ и $2^k b' + a' + 1 = 2^{n-l}$. Одавде је опет $2^k \parallel a'+1$ и $2^l \parallel b'+1$, па претходне једначине дају

$$a' + w(b'+1) = a' + \frac{b'+1}{2^l} = 2^{m-k-l} \quad \text{и аналогно} \quad b' + w(a'+1) = 2^{n-k-l}.$$

Дакле, пар $(a', b') = (\frac{a+1-2^k}{2^{k+l}}, \frac{b+1-2^l}{2^{k+l}})$ је такође (k,l)-решење, и $a' < a$ и $b' < b$.

Дефинишимо низове (a_n) и (b_n) са $a_1 = a$, $b_1 = b$ и $a_{n+1} = \frac{a_n+1-2^k}{2^{k+l}}$, $b_{n+1} = \frac{b_n+1-2^l}{2^{k+l}}$. По претходном, сваки пар (a_i, b_i) је (k,l)-решење, и $a_n = 2^k - 1$ и $b_n = 2^l - 1$ за неко n. Одавде једноставном индукцијом налазимо да је

$$a = \frac{2^{n(k+l)} - 1}{2^{k+l} - 1}(2^k - 1) \quad \text{и} \quad b = \frac{2^{n(k+l)} - 1}{2^{k+l} - 1}(2^l - 1).$$

Како су a и b узајамно прости, мора бити $n = 1$, тј. $a = 2^k - 1$ и $b = 2^l - 1$.