Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

10. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

1. април 2016.

Први дан

1. Нека је n природан број већи од 1. Доказати да постоји природан број m већи од n^n такав да је
$$\frac{n^m - m^n}{n+m}$$
природан број. *(Никола Петровић)*

2. Дат је природан број n. Дефинишимо $f(0,j) = f(i,0) = 0$, $f(1,1) = n$ и
$$f(i,j) = \left\lfloor \frac{f(i-1,j)}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{f(i,j-1)}{2} \right\rfloor$$
за све природне бројеве i и j, $(i,j) \neq (1,1)$. Колико има уређених парова природних бројева (i,j) за које је $f(i,j)$ непаран број? *(Душан Ђукић)*

3. Нека је O центар кружнице описане око $\triangle ABC$. Права t додирује кружницу описану око $\triangle BOC$ и сече странице AB и AC у тачкама D и E, редом ($D, E \not\equiv A$). Тачка A' је симетрична тачки A у односу на праву t. Доказати да се кружнице описане око $\triangle A'DE$ и $\triangle ABC$ додирују. *(Душан Ђукић)*

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

10. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

2. април 2016.

Други дан

4. У $\triangle ABC$ ($AB \neq AC$) уписана кружница, чији је центар тачка I, додирује страницу BC у тачки D. Нека је тачка M средиште дужи BC. Доказати да се нормале из тачака M и D на праве AI и MI, редом, секу на правој која садржи висину $\triangle ABC$ из темена A. *(Душан Ђукић)*

5. Дато је $2n-1$ двоелементних подскупова скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$. Доказати да се може одабрати n од ових подскупова чија унија садржи не више од $\frac{2}{3}n+1$ елемената. *(Душан Ђукић)*

6. Дати су природни бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_{2^{2016}}$ такви да за све n, $1 \leqslant n \leqslant 2^{2016}$, важи

$$a_n \leqslant 2016 \quad \text{и} \quad a_1 a_2 \cdots a_n + 1 \text{ је потпун квадрат.}$$

Доказати да је неки од бројева $a_1, a_2, \ldots, a_{2^{2016}}$ једнак 1. *(Душан Ђукић)*

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

РЕШЕЊА

1. За почетак приметимо да за $m > n \geqslant 3$ важи $n^m > m^n$, те је $\frac{n^m - m^n}{m+n} > 0$. Заиста, функција $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ је опадајућа за $x > e$ јер је $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0$, па је $\frac{\ln n}{n} > \frac{\ln m}{m}$, тј. $m \ln n > n \ln m$, и одатле $n^m = e^{m\ln n} > e^{n \ln m} = m^n$.

За $n = 2$ се може узети $m = 10$. Претпоставимо да је $n > 2$. Имамо

$$n^m - m^n \equiv n^m - (-n)^n = n^n(n^{m-n} - (-1)^n) \pmod{m+n}.$$

Потражићемо m у облику $m = kn^n - n$ ($k \in \mathbb{N}$). Тада $m + n = kn^n \mid n^m - m^n$ ако и само ако $k \mid n^{m-n} - (-1)^n$.

(1°) Ако је n непарно, онда је $n^{m-n} - (-1)^n$ парно, па можемо узети $k = 2$, тј. $m = 2n^n - n$.

(2°) Ако је n парно, онда је $n^{m-n} - (-1)^n = n^{m-n} - 1$ дељиво са $n - 1$, па можемо узети $k - n - 1$, тј. $m = (n-1)n^n - n$.

Напомена. Неједнакост $n^m > m^n$ за $m > n \geqslant 3$ се може доказати индукцијом. Могућа су и другачија решења, нпр. за $n > 2$ може се узети $m = pn^n - n$, где је p било који прост делилац броја $n^{n^n - 2n} - (-1)^n$.

2. Одговор је n.

За $m \geqslant 2$ означимо $s_m = \sum_{i+j=m} f(i,j)$. Како је остатак $f(i,j)$ при дељењу са 2 једнак $f(i,j) - 2[\frac{f(i,j)}{2}]$, број непарних међу бројевима $f(i,j)$ за $i,j \geqslant 0$ и $i + j = m$ једнак је

$$\begin{aligned}\sum_{i+j=m}\left(f(i,j) - 2\left[\frac{f(i,j)}{2}\right]\right) &= s_m - \sum_{i+j=m}\left(\left[\frac{f(i-1,j+1)}{2}\right] + \left[\frac{f(i,j)}{2}\right]\right) \\ &= s_m - s_{m+1}.\end{aligned}$$

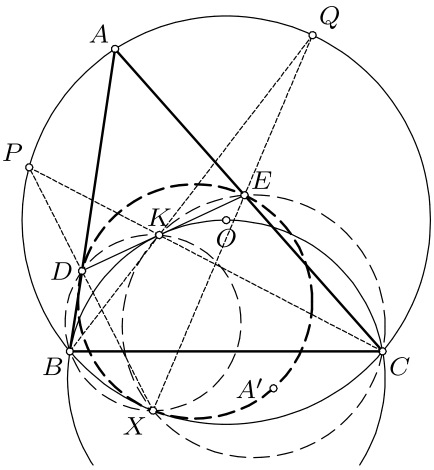
Следи да је број парова (i,j) за које је $f(i,j)$ непарно и $i + j < m$ једнак $s_2 - s_m = n - s_m$.

Остаје да покажемо да је $s_m = 0$ за све довољно велике m. Јасно је да је низ s_m ненегативан и нерастући, па постоје N и k такви да је $s_m = k$ за све $m \geqslant N$. То значи да је $f(i,j)$ парно кад год је $i + j \geqslant m$. Претпоставимо да је $k > 0$ и посматрајмо најмање i такво да је $f(i, m-i) > 0$. Једноставном индукцијом добијамо $f(i, m+r-i) = [\frac{f(i,m-i)}{2^r}]$ за $r \geqslant 1$. Међутим, ако је $2^r \leqslant f(i, m-i) < 2^{r+1}$, одавде је $f(i, m+r-i) = 1$, противно претпоставци.

Друго решење (У. Динић). Поставимо n жетона у тачку $(1,1)$ у координатној равни. У сваком кораку, из сваке тачке (i,j) ћемо пребацити по цео део половине њених жетона у тачке $(i+1, j)$ и $(i, j+1)$. Приметимо да, ако је нека врста или колона у неком тренутку непразна, она ће увек остати непразна. Тако ниједан жетон не може изаћи из квадрата $[1,n] \times [1,n]$, па се игра завршава у коначном броју корака.

Није тешко видети да се након $i + j - 2$ корака у тачки (i,j) налази тачно $f(i,j)$ жетона. Шта више, број $f(i,j)$ је непаран ако након следећег корака у тачки (i,j) остане један жетон. Како у завршној позицији има тачно n жетона, следи да међу члановима низа $f(i,j)$ има n непарних бројева.

3. Означимо са K додирну тачку праве t и круга BOC. Нека се кругови описани око троуглова BDK и CEK секу у тачки $X \neq K$. Како је $\sphericalangle BXC = \sphericalangle BXK + \sphericalangle KXC = \sphericalangle ADK + \sphericalangle KEA = 180^\circ - \sphericalangle CAB$, тачка X лежи на описаном кругу k троугла ABC. Шта више, $\sphericalangle DXE = \sphericalangle DXK + \sphericalangle KXE = \sphericalangle DBK + \sphericalangle KCE = \sphericalangle CKB - \sphericalangle CAB = \sphericalangle CAB = \sphericalangle DXE$, па X такође лежи на описаном кругу k_1 троугла $A'DE$. Доказаћемо да се кругови k и k_1 додирују у тачки X.

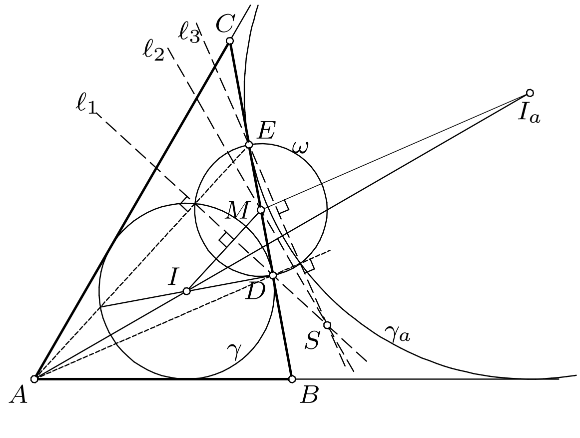


Ако се праве CK и XD секу у тачки P, онда важи $\sphericalangle XPC = \sphericalangle XDE - \sphericalangle CKE = \sphericalangle XBK - \sphericalangle CBK = \sphericalangle XBC$, што значи да P лежи на кругу k. Аналогно, праве BK и XE се секу у тачки Q на кругу k. Најзад, из $\sphericalangle XPQ = \sphericalangle XBQ = \sphericalangle XDK$ следи да је $PQ \parallel DE$. Према томе, троуглови XDE и XPQ су хомотетични са центром хомотетије X, па се њихови описани кругови додирују у X.

<u>*Друго решење.*</u> Нека праве BK и CK поново секу описани круг $\triangle ABC$ редом у тачкама Q и P. Из $\sphericalangle CPQ = \sphericalangle CBQ = \sphericalangle CKE$ следи $PQ \parallel DE$. Нека се праве DP и EQ секу у тачки X. Како су тачке $D = PX \cap AB$, $K = PC \cap QB$ и $E = AC \cap QX$ колинеарне, по обратној Паскаловој теореми тачка X лежи на истом кругу са тачкама A, B, C, P, Q. Према томе, троуглови XDE и XPQ су хомотетични, па се њихови описани кругови додирују у њиховом центру хомотетије X. Најзад, тачка A' лежи на описаном кругу $\triangle DEX$ јер је $\sphericalangle DXE = \sphericalangle PXQ = \sphericalangle PCA + \sphericalangle ABQ = \sphericalangle BKC - \sphericalangle BAC = \sphericalangle BAC = \sphericalangle DA'E$.

<u>*Напомена.*</u> Важи и општије тврђење: ако је K тачка у $\triangle ABC$, D и E тачке у којима тангента на круг BKC у K сече AB и AC, а X друга тачка пресека кругова BDK и CEK, онда се кругови DEX и ABC додирују у тачки X.

4. Означимо са γ уписани круг $\triangle ABC$, а са γ_a и I_a приписани круг наспрам A и његов центар. Тачка E симетрична тачки D у односу на M је додирна тачка γ_a са страницом BC. Нормала ℓ_1 из D на MI је радикална оса круга γ и круга ω над пречником DE, док је нормала ℓ_2 из AI радикална оса кругова γ и γ_a (због $MD = ME$). Такође, радикална оса кругова γ_a и ω је нормала ℓ_3 из E на MI_a. Праве ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3 се секу у радикалном центру S кругова γ, γ_a, ω. С друге стране, поз-



нато је (по “Великом задатку”) да важи $MI \parallel AE$ и $MI_a \parallel AD$, па праве ℓ_1 и ℓ_3 садрже висине из D и E у троуглу ADE. Следи да је S ортоцентар $\triangle ADE$, а он лежи на висини из темена A.

Друго решење. Нека се нормале из M и D редом на AI и MI секу у тачки S и нека је J тачка у којој права MI сече висину из A у $\triangle ABC$. Довољно је доказати да је $AJ = ID$. Заиста, тада ће следити да је $AJDI$ паралелограм, па је $MS \perp DJ$, тако да је D ортоцентар троугла MSJ и одатле $JS \perp MD$, тј. $AS \perp BC$.

Ово се директно израчунава. Означимо са H и F редом подножја висине и симетрале угла из темена A, и $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Тада је $BF = \frac{ac}{b+c}$, $BD = \frac{a-b+c}{2}$ и $BH = \frac{a^2-b^2+c^2}{2a}$, па је $FH = BF - BH = \frac{|b-c|((b+c)^2-a^2)}{2a(b+c)}$, $FD = BF - BD = \frac{|b-c|(b+c-a)}{2(b+c)}$ и најзад $\frac{AJ}{AH} = \frac{FD}{FH} = \frac{a}{a+b+c} = \frac{ID}{AH}$.

5. Показаћемо индукцијом по k ($k \leqslant \frac{2n-1}{3}$) да се може избацити $3k$ подскупова тако да је кардиналност уније преосталих не већа од $n-k$.

За $k=0$ то је тривијално. Претпоставимо да је $k \geqslant 1$ и да смо избацили $3(k-1)$ подскупова тако да унија преосталих не садржи више од $n-k+1$ елемената. Како је $2n-1-3(k-1) < 2(n-k+1)$, постоји елемент x_k из уније који се налази у највише три од преосталих подскупова. Дакле, можемо да избацимо још три подскупа тако да унија преосталих $2n-1-3k$ не садржи елемент x_k, што завршава индуктивни корак.

Тврђење задатка следи за $k = [\frac{n-1}{3}]$ јер је $n - [\frac{n-1}{3}] \leqslant n - \frac{n-3}{3} = \frac{2}{3}n + 1$.

Напомена. Пробабилистички метод даје слабију оцену $\sim \frac{n}{\sqrt{2}}$.

6. Кључна чињеница је да, ако су $a+1 = u^2$ и $b = v^2$ потпуни квадрати и $a > b$, онда $ab+1$ није квадрат. Заиста, тада је $(uv-1)^2 < ab+1 = u^2v^2 - v^2 + 1 < (uv)^2$.

Нека су $p_1, p_2, \ldots, p_m$ сви прости бројеви мањи од 2016. За $1 \leqslant n \leqslant 2^{2016}$ посматрајмо бинарни низ $\mathrm{c}_n = (r_1, r_2, \ldots, r_m)$, где је $r_i = 0$ ако је експонент уз p_i у производу $P_n = a_1a_2\cdots a_n$ паран, а $r_i = 1$ у супротном. Како за низ c_n има само 2^m могућности, за свако $k \leqslant 2^{2016} - 2^m$ међу низовима $\mathrm{c}_k, \mathrm{c}_{k+1}, \ldots, \mathrm{c}_{k+2^m}$ постоје два једнака, рецимо c_s и c_t ($s < t$), а тада је P_t/P_s потпун квадрат не већи од 2016^{2^m}.

Претпоставимо да у низу (a_n) нема јединица. Узмимо $k = 11 \cdot 2^m$; свакако је $k + 2^m < 2^{2016}$. Видели смо да постоје индекси s, t, $k \leqslant s < t \leqslant k + 2^m$, тако да је $b = P_t/P_s$ потпун квадрат. Међутим, како је $a = P_s \geqslant P_k \geqslant 2^k = 2048^{2^m} > 2016^{2^m} \geqslant b$, по чињеници са почетка, $a + 1 = P_s + 1$ и $ab + 1 = P_t + 1$ не могу истовремено да буду квадрати, што је контрадикција.