**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**Друштво математичара Србије**

# ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

**19. фебруар 2017.**

## Први разред – А категорија

**1.** За коначне скупове $A$, $B$, $C$ и $D$ важи $D \subseteq A \cup B$, $D \subseteq C$ и

$$|A \triangle B| + |B \setminus C| + |C \setminus D| + |B \cap D| = |A|.$$

a) Доказати да важи $B \cup C \subseteq A$.

b) Да ли мора важити нека од инклузија $B \subseteq C$ или $C \subseteq B$?

**2.** Дата је кружница $k$ с центром у тачки $O$ и тачка $T$ у њеној спољашњости. Тангенте из $T$ на $k$ додирују $k$ у тачкама $A$ и $B$. Нека је $k'$ кружница с центром у тачки $T$ која пролази кроз тачке $A$ и $B$. Нека је $C$ произвољна тачка на $k'$ која је притом у спољашњости кружнице $k$, при чему праве $CA$ и $CB$ секу кружницу $k$ још у тачкама $D$ и $E$, редом, и важи поредак $C - A - D$ и $C - E - B$. Доказати да је $DE$ пречник кружнице $k$.

**3.** На једном кошаркашком турниру учествује 16 екипа које играју двокружно, тј. свака екипа игра по два пута са сваком другом. Пролаз на наредни турнир остварује првопласираних 8 екипа. Поредак екипа се одређује на основу броја победа, а уколико постоји више екипа с истим бројем победа, њихов међусобни поредак се утврђује жребом. Колико је најмање победа потребно једном тиму да би осигурао пролаз?

**4.** Одредити све природне бројеве $n$ који имају следећа својства: $n$ је дељив са 2 али не и са 4, збир цифара броја $n$ је једнак 6, број делилаца броја $n$ је једнак 8, збир делилаца броја $n$ је дељив са 10 и $n$ не даје остатак 12 нити 14 при дељењу са 16.

**5.** Дужине страница неког троугла су међусобно различити природни бројеви, а његова површина је такође природан број. Да ли тај троугао мора бити правоугли?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**Друштво математичара Србије**

# ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

**19. фебруар 2017.**

**Други разред – А категорија**

**1.** Наћи све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да за све $x \in \mathbb{R}$ важи $f(x) \leqslant x$ и за све $x, y \in \mathbb{R}$ важи $f(x + y) \leqslant f(x) + f(y)$.

**2.** Одредити све четвороцифрене природне бројеве $\overline{abcd}$, где различитим словима одговарају различите цифре, за које важи

$$\overline{abcd} = d^{a^2} + d^{b+c} - d^{a+b+c} - d^a + 1.$$

**3.** Дат је $\triangle ABC$ у ком је $\measuredangle C$ туп. На његовим страницама уочене су тачке $D \in AC$, $E \in AB$ и $F \in BC$ такве да је четвороугао $CDEF$ ромб. Ако важи $AE = 140$, $BE = 84$ и $r = 15\sqrt{3}$, где је $r$ полупречник кружнице уписане у ромб $CDEF$, израчунати површину $\triangle ABC$.

**4.** Нека су $a$, $b$ и $c$ странице неког троугла. Доказати неједнакост

$$\frac{\sqrt{ab}}{a+b-c} + \frac{\sqrt{bc}}{b+c-a} + \frac{\sqrt{ca}}{c+a-b} \geqslant 3.$$

**5.** На великом столу се налазе чоколадице нумерисане бројевима од 1 до 2017, поређане редом по тим бројевима. Маша и Медвед играју следећу игру. Маша игра прва, њих двоје вуку потезе наизменично, и игра се завршава након 63 одиграна потеза. У $k$-том потезу играч који игра једе $k$ узастопних чоколадица са стола. (Дакле, прво Маша једе 1 чоколадицу, па Медвед једе 2 узастопне чоколадице, па Маша 3 и тако даље, док у 63. потезу Маша не поједе 63 узастопне чоколадице, после чега преостаје једна чоколадица.) Маша побеђује ако последња преостала чоколадица има непаран број, а Медвед ако је тај број паран. Ко има победничку стратегију? (Напомена: узастопне чоколадице не морају нужно бити нумерисане узастопним природним бројевима, тј. чоколадице $i$ и $j$ за $i < j - 1$ сматрамо узастопнима уколико су све чоколадице нумерисане бројевима између $i$ и $j$ већ поједене.)

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**Друштво математичара Србије**

# ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

**19. фебруар 2017.**

**Трећи разред – А категорија**

**1.** У датом троуглу полупречник уписане кружнице и полупречници приписаних кружница чине (у неком поретку) узастопне чланове геометријске прогресије. Одредити највећи угао тог троугла.

**2.** Наћи све вредности реалног параметра $a$ за које нека два различита решења једначине

$$x^4 - ax^3 + x^2 + a = 0$$

(у скупу $\mathbb{C}$) имају збир једнак 1.

**3.** Нека $u, v, w, z \in \mathbb{C}$. Доказати неједнакост:

$$2\operatorname{Re}(uz + vw) \leqslant 4(|u|^2 + |v|^2) + \frac{1}{4}(|z|^2 + |w|^2).$$

**4.** Доказати да постоји бесконачно много природних бројева $n$ за које се скуп делилаца броја $n$ може поделити на дисјунктне скупове (бар два) такве да је збир елемената у сваком од тих скупова потпун квадрат.

**5.** У простору је дат скуп $S$ који се састоји од 100 тачака таквих да никоје 3 нису колинеарне и никоје 4 нису компланарне. Сваке две тачке скупа $S$ спојене су дужима, а затим су дужи обојене тако да је тачно њих 2017 обојено црвеном, а преостале плавом бојом. Доказати да постоји троугао са теменима у $S$ чија је тачно једна страница обојена плавом бојом или тетраедар са теменима у $S$ чија је тачно једна ивица обојена црвеном бојом.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**Друштво математичара Србије**

# ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

**19. фебруар 2017.**

**Четврти разред – А категорија**

**1.** Дати су вектори $\vec{a} = (2, 1, p)$ и $\vec{b} = (2, p+1, 4)$.

a) Одредити све могуће вредности параметра $p$ за које постоји вектор $\vec{v}$ такав да важи:

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = |\vec{b}|;$$
$$\vec{a} \times \vec{v} = \vec{b}.$$

b) За сваку такву вредност $p$ одредити све такве векторе $\vec{v}$, и за сваки од њих одредити углове које он заклапа са $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

**2.** Колико постоји растућих коначних низова природних бројева чији је први елемент једнак 1, последњи елемент једнак 25, и свака два узастопна члана се разликују за 2 или 3?

**3.** Дат је природан број $n$. Нека је $N$ број бројева који записани у систему са основом $n+1$ имају све цифре различите од 0 и различите међусобно. Доказати:

$$|n!e - N| < 1 + \frac{1}{n}.$$

**4.** Из тачке $P$ су конструисане тангенте $PA$ и $PB$ на кружницу $\gamma$ (где $A, B \in \gamma$). На правој $PA$ уочена је тачка $Q$ таква да важи распоред $P - A - Q$ и $PA \cong AQ$, а $C$ је произвољна тачка на дужи $AB$ различита од $A$ и $B$. Кружница описана око $\triangle PBC$ сече кружницу $\gamma$ у тачки $D$, $D \not\equiv B$. Доказати: $\measuredangle PBD \cong \measuredangle QCA$.

**5.** У скупу ненегативних целих бројева решити једначину

$$p^3 + 41 = 7(7q! - r^3).$$

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**Друштво математичара Србије**

# ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

**19. фебруар 2017.**

### Први разред – Б категорија

**1.** Нека је $\rho$ релација на скупу $\mathbb{R}$ дефинисана са:

$$x \,\rho\, y \text{ ако и само ако важи } x^2 - y^2 \geqslant 0.$$

Испитати да ли је релација $\rho$ рефлексивна, симетрична, антисиметрична и транзитивна, да ли је релација еквиваленције, и да ли је релација поретка.

**2.** Нека су $a$, $b$ и $c$ природни бројеви чији је збир једнак 100. Посматрајмо све разлике нека два од ова три броја. Ако је познато да је једна од ових разлика једнака 60 и једна једнака 38, одредити бројеве $a$, $b$ и $c$.

**3.** Дат је једнакокраки $\triangle ABC$ у ком важи $AB \cong AC$ и $\measuredangle BAC = 80^\circ$. Нека је $AD$ висина овог троугла. Тачка $E$ је изабрана у његовој равни тако да важи $AD \cong EB$, $\measuredangle AED = 50^\circ$ и тачке $E$ и $B$ се налазе са исте стране праве $AD$. Доказати да је четвороугао $ACDE$ паралелограм.

**4.** Наћи све четвороцифрене бројеве који при дељењу са 197 дају остатак 47, а при дељењу са 198 дају остатак 37.

**5.** Колико има природних бројева мањих од 100 000 дељивих са 4 у чијем декадном запису учествују само цифре 0, 1, 2, 3 и 5? (Цифре се могу понављати и не мора се свака од њих појавити у запису таквог броја.)

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**Друштво математичара Србије**

# ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

**19. фебруар 2017.**

## Други разред – Б категорија

**1.** Одредити вредност параметра $k$ тако да за решења $x_1$ и $x_2$ једначине

$$2x^2 + 3x + 3k + 1 = 0$$

важи

$$2x_1 - x_2 = 3.$$

**2.** Конструисати $\triangle ABC$ ако су у равни задате следеће његове значајне тачке: теме $A$, тежиште $T$ и центар описане кружнице $O$.

**3.** Да ли је могуће у изразу

$$ТРИ \cdot ТРИ = ДЕВЕТ$$

доделити истим словима исте а различитим словима различите цифре (и притом $Т, Д \neq 0$) а да се добије тачна једнакост?

**4.** У скупу реалних бројева решити једначину

$$x(x+1)(x^2+x+1) = 6.$$

**5.** Дата је квадратна таблица $n \times n$. Потребно је у свако њено поље уписати по један реалан број тако да на свакој дијагонали збир бројева износи 2017. (Притом посматрамо дијагонале свих могућих дужина: дакле, две дијагонале дужине $n$, четири дијагонале дужине $n-1$, четири дијагонале дужине $n-2$, $\dots$, четири дијагонале дужине 2 и четири дијагонале дужине 1.) Да ли је ово могуће постићи за:

a) $n = 5$;

b) $n = 2017$?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**Друштво математичара Србије**

# ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

**19. фебруар 2017.**

**Трећи разред – Б категорија**

**1.** Решити једначину:

$$\frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x}{3\sin x + \cos 2x} = \operatorname{ctg} 2x.$$

**2.** Дат је $\triangle ABC$. Права паралелна са $AC$ сече страницу $AB$ у тачки $P$, тежишну дуж $AA_1$ у тачки $K$, а страницу $BC$ у тачки $L$. Ако важи $PK = 7$ и $KL = 5$, одредити дужину странице $AC$.

**3.** Наћи све вредности реалног параметра $m$ за које систем једначина

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4;\\ (x+m)^2 + (y-m)^2 &= 1 \end{aligned}$$

има тачно једно решење.

**4.** Наћи све природне бројеве $n$ за које су сви бројеви $n+1$, $n+3$, $n+7$, $n+9$, $n+13$ и $n+15$ прости.

**5.** У кутији постоји 67 куглица које долазе у две величине (мале и велике) и две боје (беле и црвене). Познато је:

- број црвених куглица је дељив са 5;
- број великих црвених куглица једнак је броју белих куглица;
- од све четири врсте куглица, најмање има малих белих;
- број куглица сваке врсте је прост.

Одредити колико у кутији има куглица од сваке врсте.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**Друштво математичара Србије**

# ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

## 19. фебруар 2017.

### Четврти разред – Б категорија

**1.** Ако важи једнакост

$$\sqrt{17^2+17^2+17^2+\cdots+17^2+17^2+17^2}=17^2+17^2+17^2,$$

колико пута се $17^2$ јавља као сабирак под кореном?

**2.** Од свих једнакокраких трапеза којима угао на основици износи $60^\circ$ и чија је површина једнака $6\sqrt{3}$, одредити онај који има минимални обим.

**3.** Колико има природних бројева мањих од $10\,000$ у чијем се декадном запису не појављују цифре 4, 8 и 9, а цифра 1 се појављује тачно једанпут? (Преостале цифре се могу појављивати произвољан број пута, укључујући и могућност да се не појаве уопште.)

**4.** Доказати да број $2017^{2017}+19$ није потпун степен (већи од првог) ниједног природног броја.

**5.** Решити једначину

$$x^4+(x+2)^4=2.$$

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.