Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Решења задатака

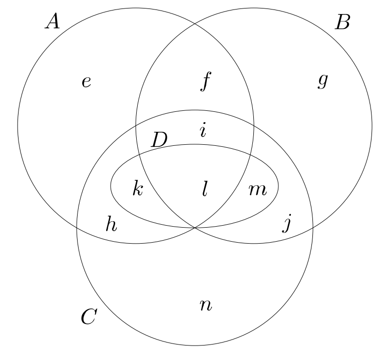
Први разред – А категорија

1. а) Венов дијаграм за задате скупове изгледа као на слици, при чему су малим словима означене кардиналности одговарајућих делова. Једнакост из поставке се преводи на

$$(e+h+k+g+m+j)+(f+g)+(h+i+j+n)+(l+m)=e+f+h+i+k+l,$$

а одавде следи $2g+h+2j+2m+n=0$, те закључујемо $g=h=j=m=n=0$. Према томе, $B\cup C$ се састоји само од делова у којима су слова f, i, k и l, па одмах имамо $B\cup C\subseteq A$.

b) Не мора важити ниједна од тих инклузија. Узмимо $A=\{1,2\}$, $B=\{1\}$ и $C=D=\{2\}$. Тада не важи ниједна од посматраних инклузија, а притом имамо $A\triangle B=\{2\}$, $B\setminus C=\{1\}$, $C\setminus D=\varnothing$ и $B\cap D=\varnothing$, па је испуњена једнакост из поставке.

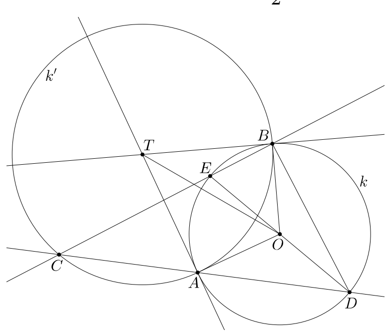


Ок 2016 1А 1

2. На основу особина периферијских и централних углова имамо $\measuredangle ACB\cong\frac{\measuredangle ATB}{2}\cong\measuredangle ATO$ и $\measuredangle ADB\cong\frac{\measuredangle AOB}{2}\cong\measuredangle AOT$. Сада следи

$$\measuredangle DBE=\measuredangle DBC=180^\circ-\measuredangle ACB-\measuredangle ADB=180^\circ-\measuredangle ATO-\measuredangle AOT=\measuredangle TAO=90^\circ,$$

па је DE пречник кружнице k.



Ок 2016 1А 2

3. Доказаћемо да је одговор 23. Прво конструишемо пример када 22 победе нису довољне за пролазак у следећи круг. Одаберимо неких 9 екипа и нека је свака од тих екипа победила оба пута преосталих 7 екипа, док за сваке две екипе од тих 9 важи да у међусобна два дуела имају по тачно једну победу. Тада свака од тих 9 екипа има тачно $2\cdot 7+8=22$ победе, а како 8 њих пролази даље, једна од тих 9 неће проћи. Дакле, потребне су бар 23 победе. Оне су и довољне, јер у супротном би бар 9 тимова морало да има по бар 23 победе, што уз утакмице које играју преосталих 7 тимова, а таквих је 42, даје да је на турниру било бар $23\cdot 9+42=249$ утакмица; међутим, на турниру је одиграно $15\cdot 16=240$ утакмица, контрадикција.

4. Знамо да је n дељив са 2, а како му је збир цифара дељив са 3, то и n мора бити дељив са 3. Знамо и да n није дељив са 4, а такође ни са 9 (јер му збир цифара није дељив са 9), па n мора имати још неки прост фактор, пошто има тачно 8 делилаца. Из овога закључујемо да n мора бити облика $n=6p$, где је p прост број различит од 2 и 3. Сада можемо одредити збир делилаца броја n: он износи $1+2+3+6+p+2p+3p+6p=12(p+1)$, а како је овај број по услову задатка дељив са 10, мора важити $5\mid p+1$. Одавде се прост број p завршава цифром 9, а број $n=6p$ се завршава цифром 4. Збир цифара броја n је 6, што оставља три могућности за двоцифрени завршетак тог броја: 04, 14 и 24. Међутим, ако се број завршава са 04 или 24, онда је дељив са 4, што не важи за n, па је двоцифрени завршетак броја n једнак 14. Пошто је збир цифара броја n једнак 6, следи $n=10^x+14$ за неки природан број $x>1$. За $x\geqslant 4$ важи $n\equiv 14\pmod{16}$, а ово је искључено условом из поставке. Према томе, остаје још испитати могућности $x=2$ и $x=3$. У случају $x=2$ добијамо решење $114=6\cdot 19$ (даје остатак 2 при дељену са 16), док у случају $x=3$ нема решења због $1014=6\cdot 169$ а 169 није прост број (што је у супротоности са обликом $n=6p$). Дакле, једино решење је $n=114$.

5. Не мора бити правоугли. Приметимо да су троуглови са страницама дужине 9, 12 и 15, као и 5, 12 и 13, правоугли и да имају целобројну површину (она износи 54, односно 30). Њих можемо „слепити“ по заједничкој катети дужине 12, и на тај начин добијамо троугао чије су странице дужине 13, 15 и $9+5=14$, његова површина је $54+30=84$, а овај троугао очигледно није правоугли јер $13^2+14^2=365\neq 225=15^2$.

Други разред – А категорија

1. За $x=0$ добијамо из првог услова $f(0)\leqslant 0$, а из другог услова $f(y)\leqslant f(0)+f(y)$, тј. $0\leqslant f(0)$, па скупа имамо $f(0)=0$. Сада за $y=-x$, користећи оба задата услова, добијамо

$$0=f(0)=f(x+(-x))\leqslant f(x)+f(-x)\leqslant x+(-x)=0,$$

одакле закључујемо $f(x)=-f(-x)$ за све $x\in\mathbb{R}$. Како из услова из поставке следи $f(-x)\leqslant -x$, добијамо

$$x\leqslant -f(-x)=f(x)\leqslant x$$

(на крају смо поново искористили услов из поставке). Одавде директно следи $f(x)=x$ за све $x\in\mathbb{R}$.

2. Очигледно мора важити $d>1$. Затим, пошто је број на десној страни непаран број, на основу леве стране следи да је и d непарна цифра. Додатно, $d\neq 5$, јер би у супротном лева страна била дељива са 5 а десна не. Дакле $d\in\{3,7,9\}$. Даље, имамо и $a>1$, јер би у супротном десна страна била негативна.

Докажимо да важи $a^2\geqslant a+b+c$. Претпоставимо супротно: $a^2\leqslant a+b+c-1$. Тада имамо

$$d^{a^2}+d^{b+c}-d^{a+b+c}-d^a+1<d^{a+b+c-1}+d^{a+b+c-1}-d^{a+b+c}-d^a+1<d\cdot d^{a+b+c-1}-d^{a+b+c}-d^a+1=1-d^a<0,$$

контрадикција. Дакле, $a^2\geqslant a+b+c$.

Узмимо прво $a\geqslant 3$. Ако важи $a^2=a+b+c$, тада имамо $b+c=a^2-a$ и добијамо:

$$d^{a^2}+d^{b+c}-d^{a+b+c}-d^a+1=d^{a^2-a}-d^a+1=d\cdot d^{a^2-a-1}-d^a+1>(d-1)d^{a^2-a-1}+1>d^{a^2-a-1},$$

а ако важи $a^2>a+b+c$, следи $a+b+c\leqslant a^2-1$, па добијамо:

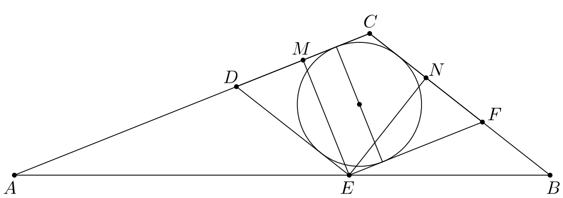
$$d^{a^2}+d^{b+c}-d^{a+b+c}-d^a+1>d^{a^2}-d^{a^2-1}-d^a+1>(d-2)d^{a^2-1}+1>d^{a^2-a-1}.$$

Дакле, свакако смо десну страну једначине из поставке ограничили одоздо са d^{a^2-a-1}. Међутим, за $a\geqslant 4$ имамо $d^{a^2-a-1}\geqslant 3^{11}>9999$, а за $a=3$ следи $d\in\{7,9\}$ (јер су a и d различите цифре), па имамо $d^{a^2-a-1}\geqslant 7^6>9999$. Све заједно, за $a\geqslant 3$ број на десној страни не може бити четвороцифрен, па преостаје једино $a=2$.

За $a=2$ следи $2\geqslant b+c$, а пошто су b и c различите цифре, мора бити $\{b,c\}=\{0,1\}$. Тада $3\mid a+b+c$, па $3\nmid d$ јер би у супротном број на левој страни био дељив са 3 (пошто му је збир цифара дељив са 3) али број на десној страни не. Дакле, једина преостала могућност је $d=7$, па израчунавамо:

$$\overline{abcd}=7^{2^2}+7^1-7^3-7^2+1=2401+7-343-49+1=2017,$$

што је једино решење задатка.



Ок 2017 2А 3

3. Нека су α, β и γ углови посматраног троугла, и нека су M и N подножја нормала из E на AC и BC, редом. Пошто је висина ромба једнака пречнику уписане кружнице, следи $EM=EN=30\sqrt{3}$. Сада добијамо $\sin\alpha=\frac{EM}{EA}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$ и $\sin\beta=\frac{EN}{EB}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$, а одатле израчунавамо и $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{13}{14}$ и $\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\frac{11}{14}$ (овде смо користили да су α и β оштри, јер је γ туп). Одатле имамо

$$\sin\gamma=\sin(180^\circ-\gamma)=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=\frac{98\sqrt{3}}{196}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

па како је γ туп, следи $\gamma=120^\circ$. Даље, пошто имамо $AB=140+84=224$, сада из $\frac{AB}{\sin\gamma}=\frac{BC}{\sin\alpha}=\frac{AC}{\sin\beta}$ добијамо $BC=96$ и $AC=160$. Одатле налазимо $P_{\triangle ABC}=\dfrac{BC\cdot AC\cdot\sin\gamma}{2}=3840$.

4. Према неједнакости између аритметичке и геометријске средине важи

$$\frac{\sqrt{ab}}{a+b-c}+\frac{\sqrt{bc}}{b+c-a}+\frac{\sqrt{ca}}{c+a-b}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{abc}{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}},$$

па је довољно показати још $\frac{abc}{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}\geqslant 1$. Увођењем смене $x=b+c-a$, $y=c+a-b$, $z=a+b-c$ (тј. $a=\frac{y+z}{2}$, $b=\frac{x+z}{2}$, $c=\frac{x+y}{2}$) жељена неједнакост се своди на $\frac{(y+z)(x+z)(x+y)}{8xyz}\geqslant 1$, а пошто према неједнакости између аритметичке и геометријске средине важи $y+z\geqslant 2\sqrt{yz}$, $x+z\geqslant 2\sqrt{xz}$ и $x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$, множењем ових израза добијамо $(y+z)(x+z)(x+y)\geqslant 8xyz$, што смо и желели доказати (алтернативно, уместо увођења наведене смене могуће је и расписати добијену неједнакост, чиме се она своди на $a^3+b^3+c^3+3abc\geqslant a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2$, а што је Шурова неједнакост).

5. Докажимо да Маша има победничку стратегију. Она треба у сваком свом потезу да узима чоколадице с левог краја стола (тамо где се на почетку игре налази чоколадица с бројем 1). Приметимо да Медвед у сваком потезу једе паран број узастопних чоколадица, па се, уз овакву Машину стратегију, током игре на столу увек наизменично смењују чоколадице с парним и непарним бројевима. Такође, чоколадица на скроз десном крају ће увек имати непаран број, како год Медвед играо. Према томе, када на крају игре остане само једна чоколадица, она ће имати непаран редни број.

Трећи разред – А категорија

1. Нека су a, b и c странице тог троугла, s његов полуобим, а r, r_a, r_b и r_c посматрани полупречници. Из израза за површину $P = rs = r_a(s-a) = r_b(s-b) = r_c(s-c)$ закључујемо да и величине s, $s-a$, $s-b$ и $s-c$ такође образују геометријску прогресију. Уз претпоставку (без умањења општости) $a < b < c$ следи $s(s-c) = (s-a)(s-b)$, што се даље своди на $sa+sb-sc = ab$, тј. $(a+b+c)(a+b-c) = 2ab$, а одавде имамо $a^2+b^2-c^2 = 0$, па је највећи угао у посматраном троуглу једнак $90°$.

2. Нека су y, z, u и v нуле датог полинома, где важи $y+z = 1$. Из Вијетових формула имамо $y+z+u+v = a$, одакле следи $u+v = a-1$; даље, $(y+z)u+(y+z)v+uv+yz = 1$, тј. $u+v+uv+yz = 1$, а што уз претходни закључак даје $uv+yz = 1-(u+v) = 1-(a-1) = 2-a$; и затим, $(y+z)uv+(u+v)yz = 0$, тј. $uv+(a-1)yz = 0$, а одузимањем претходно добијене једнакост од ове следи $(a-2)yz = a-2$, тј. $(a-2)(yz-1) = 0$.

Уколико важи $yz = 1$, тада из претходних једнакости добијамо $uv = 1-a$, па да би била испуњена и последња Вијетова формула, $yzuv = a$, мора важити $1-a = a$, тј. $a = \frac{1}{2}$. Ова вредност јесте решење задатка јер бројеви y, z, u и v испуњавају све четири Вијетове формуле за посматрани полином, а онда они заиста морају бити његове нуле.

У случају $a = 2$ једначина из поставке своди се на $x^4-2x^3+x^2+2 = 0$, тј. $0 = (x^2-x)^2+2 = (x^2-x-2i)(x^2-x+2i)$. Из Вијетових формула примењених на полином у првој загради (или другој) следи да је збир корена тог полинома једнак 1, па и $a = 2$ јесте могућа вредност.

Дакле, задатак има два решења: $a \in \{\frac{1}{2}, 2\}$.

3. Важи

$$4|u|^2 + \frac{|z|^2}{4} \geqslant 2\sqrt{4|u|^2 \cdot \frac{|z|^2}{4}} = 2|uz| \geqslant 2\,\mathrm{Re}(uz),$$

и аналогно

$$4|v|^2 + \frac{|w|^2}{4} \geqslant 2\,\mathrm{Re}(vw).$$

Сабирањем ових неједнакости добијамо неједнакост из поставке.

4. Потражимо такве бројеве у облику $n = p^k$ где је p прост број. Скуп делилаца броја n је тада $\{1, p, p^2, p^3, ..., p^k\}$. Поделимо овај скуп на следеће двочлане подскупове: $\{1, p\}$, $\{p^2, p^3\}$, …, $\{p^{k-1}, p^k\}$, где смо поставили додатан захтев да k буде непаран број и $k > 1$. Збир бројева у сваком оваквом подскупу је облика $p^{2i}(1+p)$, па да би ово било потпун квадрат, довољно је да $1+p$ буде потпун квадрат. Ово је испуњено нпр. за $p = 3$ (и заправо само за $p = 3$, али то нам је довољно). Дакле, услов из поставке испуњавају сви бројеви облика 3^k за $k > 1$, $2 \nmid k$.

5. Уведимо релацију $\sim$ на тачкама скупа S: за $A, B \in S$ пишемо $A \sim B$ акко је дуж AB црвена или $A = B$. Претпоставимо да не постоји троугао чија је тачно једна страница плава. То значи да, кад год су A, B и C различите тачке скупа S за које важи $A \sim B$ и $B \sim C$, тада и дуж AC мора бити црвена, тј. $A \sim C$. Следи да је $\sim$ релација еквиваленције. Нека су $S_1, S_2, \ldots, S_n$ све класе еквиваленције. Очигледно, $n > 1$. Претпоставимо $n = 2$ и означимо $|S_1| = k$ и $|S_2| = 100-k$. Тада црвених дужи има укупно

$$\binom{k}{2} + \binom{100-k}{2} = \frac{k(k-1)+(100-k)(99-k)}{2} = k^2 - 100k + 4950 = (k-50)^2 + 2450 > 2017,$$

што је немогуће. Према томе, $n \geqslant 3$. Сада одаберимо произвољне тачке $A, B \in S_1$, $C \in S_2$ и $D \in S_3$: тада је дуж AB црвена док су дужи AC, AD, BC, BD и CD све плаве, па је тетраедар $ABCD$ тражени.

Четврти разред – А категорија

1. а) Како из друге једначине следи $\vec{b} \perp \vec{a}$, имамо $\vec{b} \cdot \vec{a} = 0$, тј. $4+(p+1)+4p = 0$, а одатле добијамо $p = -1$. Дакле, ова вредност једина долази у обзир за параметар p, уколико за њу можемо наћи вектор $\vec{v}$ какав је тражен (а што ће се испоставити да јесте могуће у наредном делу задатка).

b) Имамо $\vec{a} = (2, 1, -1)$ и $\vec{b} = (2, 0, 4)$, и означимо $\vec{v} = (x, y, z)$. Тада из прве једнакости из поставке имамо $2x+y-z = \sqrt{2^2+0^2+4^2} = 2\sqrt{5}$, а из друге $(z+y, -2z-x, 2y-x) = (2, 0, 4)$, тј. још и $z+y = 2$ и $x+2z = 0$ (последњу једначину изостављамо јер је последица прве две). Заменом нпр. $x = -2z$ и $y = 2 - z$ из последње две једначине у прву добијамо $-6z + 2 = 2\sqrt{5}$, тј. $z = \frac{1-\sqrt{5}}{3}$, па онда налазимо $\vec{v} = (\frac{2\sqrt{5}-2}{3}, \frac{5+\sqrt{5}}{3}, \frac{1-\sqrt{5}}{3})$, што је, дакле, јединствено решење за $\vec{v}$. Коначно, $\vec{v}$ са $\vec{b}$ заклапа угао од 90°, што се одмах види из друге једнакости из поставке, а ако са φ означимо угао који $\vec{v}$ заклапа са $\vec{a}$, тада имамо $\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{|\vec{a}||\vec{v}|} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{\frac{20}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, тј. $\varphi = 45^\circ$.

2. *Прво решење.* Нека је x број парова узастопних чланова низа који се разликују за 2, а y број парова који се разликују за 3. Јасно, мора важити $2x + 3y = 25 - 1 = 24$, а одатле следи $3 \mid x$ и на основу тога лако излиставамо све могућности:

$$(x, y) \in \{(12, 0), (9, 2), (6, 4), (3, 6), (0, 8)\}.$$

За сваки овакав пар (x, y) пребројаћемо колико постоји тражених низова чији је то кореспондентни пар. У једном низу ком одговара пар (x, y) постоји укупно $x + y$ разлика између суседних чланова, од којих треба изабрати x оних које су једнаке 2, и тада су преосталих y једнаке 3; дакле, постоји $\binom{x+y}{y}$ таквих низова. Стога, тражени број је

$$\binom{12}{12} + \binom{11}{9} + \binom{10}{6} + \binom{9}{3} + \binom{8}{0} = 1 + 55 + 210 + 84 + 1 = 351.$$

Друго решење. Означимо са A_n број растућих коначних низова чији је први елемент 1, последњи n, и свака два узастопна члана се разликују за 2 или 3. Раздвајањем случајева по томе да ли је последња разлика једнака 2 или 3, добијамо рекурентну формулу $A_n = A_{n-2} + A_{n-3}$. С обзиром на почетне услове $A_1 = 1$, $A_2 = 0$, $A_3 = 1$, лако можемо израчунати првих 25 елемената низа:

$$1, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37, 49, 65, 86, 114, 151, 200, 265, 351$$

па је решење задатка $A_{25} = 351$.

3. Једноцифрених бројева има тачно n, двоцифрених $n(n-1)$, троцифрених $n(n-1)(n-2)$ итд. до n-тоцифрених бројева (што је максималан могућ број цифара под задатим условима), којих има $n!$. Дакле,

$$N = n + n(n-1) + n(n-1)(n-2) + \cdots + n! = n!\left(1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{(n-1)!}\right).$$

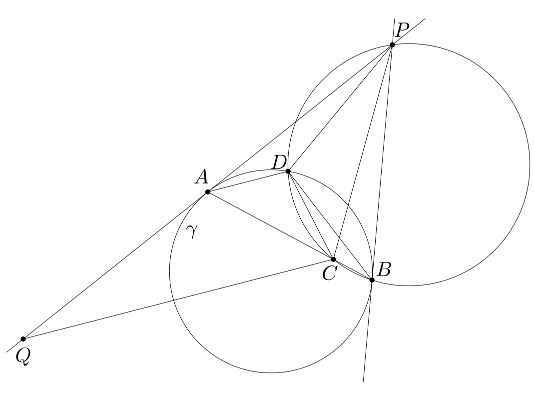
Према томе,

$$|n!e - N| = \left|n!\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!} - n!\left(1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{(n-1)!}\right)\right| = n!\sum_{i=n}^{\infty}\frac{1}{i!},$$

а користећи очигледну неједнакост $\frac{n!}{(n+k)!} \leqslant \frac{1}{(n+1)^k}$, где се једнакост достиже само за $k = 0, 1$, даље имамо

$$\sum_{i=n}^{\infty}\frac{n!}{i!} < \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = 1 + \frac{1}{n},$$

чиме је доказ завршен.



Ок 2017 4А 4

4. Важи $\triangle BDP \sim \triangle ADC$, што следи из $\measuredangle DBP \cong \measuredangle DAC$ (угао између тетиве и тангенте) и $\measuredangle BPD = 180^\circ - \measuredangle BCD = \measuredangle ACD$. Следи $\frac{PD}{CD} = \frac{PB}{CA} = \frac{QA}{CA}$ (последња једнакост следи из $PB \cong PA \cong QA$), па уз $\measuredangle PDC = 180^\circ - \measuredangle PBC = 180^\circ - \measuredangle PAB = \measuredangle QAC$ следи $\triangle PDC \sim \triangle QAC$. Одавде добијамо $\measuredangle PBD \cong \measuredangle PCD \cong \measuredangle QCA$.

5. Одговор: задата једначина има седам решења, и то су

$$(p, q, r) \in \{(1, 0, 1), (1, 1, 1), (1, 2, 2), (2, 0, 0), (2, 1, 0), (4, 3, 3), (18, 5, 1)\}.$$

Посматраћемо задату једначину по модулу 9. За $q \geqslant 6$ важи $9 \mid q!$. Тада мора важити $p^3 + 5 \equiv -7r^3 \equiv 2r^3 \pmod 9$. Остаци кубова при дељењу са 9 могу бити само 0, 1 или 8 (што се директно проверава). Према томе, лева страна претходне релације конгруентна је са 5, 6 или 4 по модулу 9, док је десна страна конгруентна са 0, 2 или 7. Одатле закључујемо да за $q \geqslant 6$ нема решења.

За $q = 0$ имамо $q! = 1$, па се тада задата једначина своди на $p^3 = 7(7 - r^3) - 41 = 8 - 7r^3$. Да би десна страна била ненегативна (будући да лева јесте ненегативна), мора важити $r \leqslant 1$. За $r = 0$ добијамо добијамо $p = 2$, а за $r = 1$ добијамо $p = 1$. Све идентично важи за $q = 1$. Тиме смо набројали укупно четири од наведених седам решења.

Посматрајмо случај $q = 2$. Тада се задата једначина своди на $p^3 = 7(14 - r^3) - 41 = 57 - 7r^3$, одакле имамо $r \leqslant 2$. Једина могућност је $r = 2$ и $p = 1$, чиме добијамо још једно решење. Слично, за $q = 3$ из чињенице да тада десна страна задате једначине постаје $7(42 - r^3)$ следи $r \leqslant 3$; директно се проверава да за $r \in \{0,1,2\}$ нема решења, док за $r = 3$ имамо $p^3 = 7 \cdot (42 - 27) - 41 = 7 \cdot 15 - 41 = 64$, тј. $p = 4$, па смо добили и шесто решење.

Да бисмо мало смањили број случајева које треба испитати за $q = 4$ и $q = 5$, претходно ћемо направити одређене закључке посматрањем задате једначине по модулу 8. За $q \geqslant 4$ имамо $8 \mid q!$, па добијамо $7(7q! - r^3) \equiv -7r^3 \equiv r^3 \pmod 8$, тј. (узимајући у обзир и леву страну задате једначине) $p^3 + 1 \equiv r^3 \pmod 8$. Приметимо још да за ма који паран број a важи $a^3 \equiv 0 \pmod 8$, док за непаран број a важи $a^3 \equiv a \pmod 8$. Одатле, да би важила малочас добијена релација, директно следи да су једине две могућности:

$$p \text{ је паран број и } r \equiv 1 \pmod 8, \qquad \text{или} \qquad r \text{ је паран број и } p \equiv 7 \pmod 8. \tag{$*$}$$

Узмимо сада $q = 4$. Из услова $7q! - r^3 \geqslant 0$ добијамо $r^3 \leqslant 7 \cdot 24 = 168$, тј. $r \leqslant 5$. Осим тога, имамо и $p^3 = 7(7q! - r^3) - 41 < 49q! = 1176$, тј. $p \leqslant 10$. Прва могућност из $(*)$ директно даје $r = 1$, тј. $p^3 = 7(7 \cdot 24 - 1) - 41 = 7 \cdot 167 - 41 = 1128$, па овде не добијамо решење. Друга могућност из $(*)$ директно даје $p = 7$, али тада лева страна задате једначине није дељива са 7 а десна јесте.

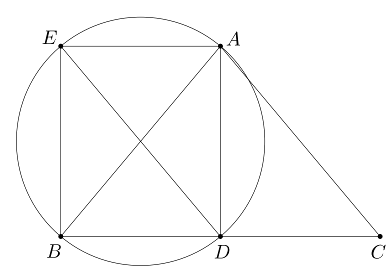
Најзад, узмимо $q = 5$. Слично као малопре, добијамо $r^3 \leqslant 7 \cdot 120 = 840$, тј. $r \leqslant 9$, и $p^3 < 49 \cdot 120 = 5880$, тј. $p \leqslant 18$. Прва могућност из $(*)$ даје $r = 1$ или $r = 9$; за $r = 1$ добијамо $p^3 = 7(7 \cdot 120 - 1) - 41 = 5832$, тј. $p = 18$, што чини седмо решење, а за $r = 9$ добијамо $p^3 = 7(7 \cdot 120 - 729) - 41 = 7 \cdot 111 - 41 = 736$, па овде нема решења. Друга могућност из $(*)$ даје $p = 7$, што је немогуће како је већ виђено, или $p = 15$, у ком случају остаје $r^3 = 7q! - \frac{p^3+41}{7} = 7 \cdot 120 - \frac{3375+41}{7} = 840 - 488 = 352$, па ни овде нема више решења.

Први разред – Б категорија

1. За свако $x \in \mathbb{R}$ важи $x^2 - x^2 = 0 \geqslant 0$, тј. $x \,\rho\, x$, па ρ јесте рефлексивна. Претпоставимо да важи $x \,\rho\, y$ и $y \,\rho\, x$. Тада имамо $x^2 - y^2 \geqslant 0$ и $y^2 - x^2 \geqslant 0$, па следи $x^2 - y^2 = 0$, тј. $x = \pm y$. Дакле, ρ није ни симетрична (јер нпр. важи $1 \,\rho\, 0$ али не важи $0 \,\rho\, 1$) ни антисиметрична (јер нпр. важи $1 \,\rho\, {-1}$ и $-1 \,\rho\, 1$, али $1 \neq -1$); одмах приметимо, одавде следи да ρ није ни релација еквиваленције ни релација поретка. Коначно, ако важи $x \,\rho\, y$ и $y \,\rho\, z$, тада имамо $x^2 - y^2 \geqslant 0$ и $y^2 - z^2 \geqslant 0$, а одатле добијамо $x^2 - z^2 \geqslant 0$, па и $x \,\rho\, z$; дакле, ρ јесте транзитивна.

2. Ако важи $60 = a - b$, тада следи $a \geqslant 61$, па b и c могу бити највише $100 - 61 - 1 = 38$. Према томе, разлика бројева b и c је највише $38 - 1 = 37$. Дакле, да би услов задатка био испуњен, једино је могуће да разлика бројева a и c буде 38, тј. пошто је a очигледно веће од c, имамо $38 = a - c$. Сада заменом $b = a - 60$ и $c = a - 38$ у $a + b + c = 100$ добијамо $3a = 198$, тј. $a = 66$, $b = 6$ и $c = 28$.

3. Важи $\measuredangle DBA = 90^\circ - \measuredangle DAB = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ = \measuredangle DEA$, па је четвороугао $ADBE$ тетиван. Сада следи $\measuredangle AEB = \measuredangle ADB = 90^\circ$, па по ставу ССУ имамо $\triangle ADB \cong \triangle BEA$. Дакле, $BD \cong AE$, па четвороугао $ADBE$ има два пара подударних наспрамних страница и он је стога паралелограм (штавише, правоугаоник). Сада из $AE \cong BD \cong CD$ и $AE \parallel BC$ следи да је $ACDE$ паралелограм.



Ок 2017 1Б 3

4. Нека је n тражени број. Тада важи $n = 197k + 47 = 198l + 37$ за неке ненегативне целе бројеве k и l. Одатле следи $198l - 197k = 10$. Пошто важи $198 - 197 = 1$, једно очигледно решење је $k = l = 10$, и тада имамо $n = 2017$. Претпоставимо да постоји још неко решење. Тада, уколико од једнакости $198l - 197k = 10$ одузмемо једнакост $198 \cdot 10 - 197 \cdot 10 = 10$, добијамо $198(l - 10) - 197(k - 10) = 0$, а пошто су 197 и 198 узајамно прости, следи $197 \mid l - 10$, тј. $l = 197s + 10$ за неко s. Уколико би важило $s > 0$, имали бисмо $l \geqslant 207$ и $n = 198l + 37 \geqslant 198 \cdot 207 + 37 > 9999$, тј. n не би био четвороцифрен број. Дакле, једино решење је $n = 2017$.

5. Једноцифрених бројева нема. Могући двоцифрени су 12, 20, 32 и 52, тј. има их 4. Троцифрени бројеви морају имати двоцифрени завршетак дељив са 4, тј. двоцифрени завршетак им мора бити нешто од ових управо набројаних бројева или пак 00; дакле, то је пет могућности за двоцифрени завршетак и још 4 могућности за цифру стотина (1, 2, 3 или 5, али не 0), па троцифрених бројева има $5 \cdot 4 = 20$. Слично, четвороцифрених има $5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$ (5 могућности за двоцифрени завршетак, 5 могућности за цифру стотина и 4 могућности за цифру хиљада), а петоцифрених има $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 = 500$. Како по услову задатка посматрани бројеви могу бити највише петоцифрени, укупно их има $4 + 20 + 100 + 500 = 624$.

Други разред – Б категорија

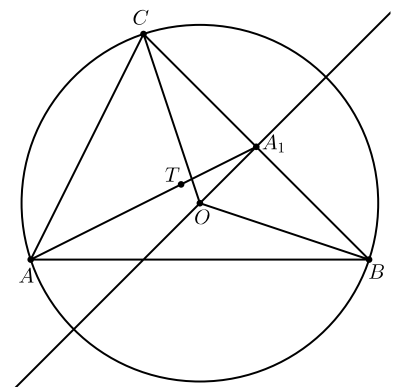
1. Из Вијетових формула имамо $x_1+x_2=-\frac{3}{2}$, па можемо записати $3=2x_1-x_2=2(x_1+x_2)-3x_2=-3-3x_2$, те израчунавамо $x_2=-2$. Уврштавањем $x=-2$ у постављену једначину имамо $2(-2)^2+3(-2)+3k+1=0$, тј. $3+3k=0$, одакле добијамо $k=-1$.

2. *Анализа.* Средиште странице BC, означимо га са A_1, налази се на продужетку дужи AT преко тачке T и важи $TA_1=\frac{1}{2}AT$, због односа у ком тежиште дели сваку тежишну дуж. Пошто се центар описане кружнице налази на пресеку симетрала страница, то је права OA_1 једна од њих, а права која је нормална на OA_1 у тачки A_1 је права која садржи страницу BC. Тачке B и C се налазе у пресеку те праве са кружницом с центром у O и која пролази кроз A.

Конструкција. Прво конструишемо тачку A_1 у продужетку AT за дужину $\frac{AT}{2}$. Затим повучемо праву OA_1, а потом и нормалу на OA_1 у A_1. На крају конструишемо кружницу са центром O која пролази кроз A, и у њеном пресеку са последњом конструисаном правом добијемо тачке B и C.

Доказ. По конструкцији је тачка O центар кружнице на којој леже тачке A, B и C, а из подударности $\triangle OA_1B\cong\triangle OA_1C$ (по ставу ССУ: $OB\cong OC$, $OA_1\cong OA_1$ и $\measuredangle OA_1B=\measuredangle OA_1C=90^\circ$) следу $BA_1\cong CA_1$, тј. A_1 је заиста средиште странице BC. Тада је и T тежиште $\triangle ABC$ због односа у ком дели тежишну дуж AA_1.

Дискусија. Ако посматране кружница и права имају две пресечне тачке (а то се дешава ако и само ако важи $OA>OA_1$), тада постоји јединствено решење (до на преименовање темена B и C). У случају $OA\leqslant OA_1$ задатак нема решења.



Ок 2017 2Б 2

3. Пошто важи $400\cdot 400=160000>99999$, закључујемо $T<4$. Пошто је T завршна цифра потпуног квадрата ($ТРИ^2$ се завршава са T), следи $T\in\{0,1,4,5,6,9\}$, а с обзиром на ограничења $T<4$ и $T\neq 0$, преостаје једино $T=1$. Одатле следи $И\in\{1,9\}$, међутим пошто су $И$ и T различите цифре, добијамо $И=9$. Сада директно проверавамо све могућности: $109^2=11881$, $129^2=16641$, $139^2=19321$, $149^2=22201$, $159^2=25281$, $169^2=28561$, $179^2=32041$ и $189^2=35721$, па пошто се ни у једном од ових случајева не добија резултат који одговара обрасцу *ДЕВЕТ*, следи да није могуће испунити захтев из поставке.

4. Уведимо смену $y=x^2+x$. Тада се једначина своди на $y(y+1)=6$, тј. $y^2+y-6=0$, и њена решења су $y_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm5}{2}$, тј. $y_1=2$ и $y_2=-3$. У другом случају враћањем смене добијамо $x^2+x+3=0$, а пошто је дискриминанта ове једначине негативна: $1^2-4\cdot 3=-11<0$, ту нема реалних решења. У првом случају враћањем смене добијамо $x^2+x-2=0$, и њена решења су $x_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm3}{2}$, тј. $x_1=1$ и $x_2=-2$, што су једина два реална решења полазне једначине.

5. a) Пошто су четири угаона поља дијагонале дужине 1, у свако од њих морамо уписати број 2017. Пошто све остале дијагонале имају по тачно два ивична поља, ако бисмо уписали у ивична поља (осим угаоних) број $\frac{2017}{2}$, а у сва преостала поља број 0, на овај начин постигли смо да збир бројева на свакој дијагонали износи 2017, осим за две најдуже дијагонале: збир на њима износи 4034. Како бисмо ово кориговали, приметимо да централно поље таблице припада једино тим двема најдужим дијагоналама, па уколико на њега упишемо број -2017 уместо 0, на тај начин смо кориговали збир на те две дијагонале, а нисмо пореметили збир на осталим дијагоналама. Доле приказујемо попуњену таблицу.

2017	$\frac{2017}{2}$	$\frac{2017}{2}$	$\frac{2017}{2}$	2017
$\frac{2017}{2}$	0	0	0	$\frac{2017}{2}$
$\frac{2017}{2}$	0	-2017	0	$\frac{2017}{2}$
$\frac{2017}{2}$	0	0	0	$\frac{2017}{2}$
2017	$\frac{2017}{2}$	$\frac{2017}{2}$	$\frac{2017}{2}$	2017

b) Имајући у виду исту идеју као у делу под а), таблицу можемо попунити на следећи начин: у четири угаона поља упишемо број 2017, у преостала ивична поља упишемо број $\frac{2017}{2}$, у централно поље упишемо број -2017, а у сва преостала поља упишемо број 0.

Трећи разред – Б категорија

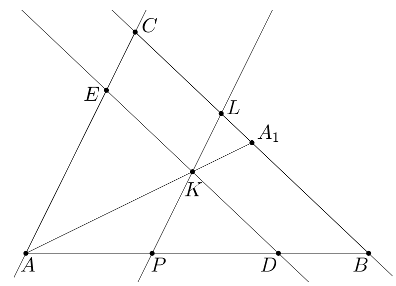
1. С обзиром на идентитете $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$ и $\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$, постављена једначина се своди на

$$\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x(3\sin x+\cos 2x)} = \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{2\operatorname{tg} x}.$$

Дакле, важи или $1-\operatorname{tg}^2 x = 0$ или $3\sin x+\cos 2x = 2$, уз услов да је $\operatorname{tg} x$ дефинисан и $\operatorname{tg} x \neq 0$. У првом случају добијамо $\operatorname{tg} x = \pm 1$, што даје решења $x = \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. У другом случају искористимо идентитет $\cos 2x = 1-2\sin^2 x$, чиме се посматрана једначина своди на $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$; увођењем смене $t = \sin x$ и решавањем тако добијене квадратне једначине, $2t^2-3t+1=0$, добијамо $t_{1/2} = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4} = \frac{3\pm 1}{4}$, тј. $t = \sin x = 1$ или $t = \sin x = \frac{1}{2}$. У случају $\sin x = 1$ имамо да $\operatorname{tg} x$ није дефинисан, па остаје $\sin x = \frac{1}{2}$, што даје решења $x = \frac{\pi}{6}+2k\pi$ или $x = \frac{5\pi}{6}+2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Дакле, све заједно добијамо:

$$x \in \left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6}+2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

2. Поставимо кроз тачку K праву која је паралелна са BC, а њене пресеке са AB и AC означимо са D и E. Из Талесове теореме имамо $\frac{CA_1}{EK} = \frac{A_1A}{KA}$ и $\frac{BA_1}{DK} = \frac{A_1A}{KA}$, тј. $\frac{CA_1}{EK} = \frac{BA_1}{DK}$, а с обзиром на $BA_1 = CA_1$, одавде следи $DK = EK$, тј. K је средиште дужи DE. Према томе, KP је средња линија $\triangle ADE$ и стога имамо $AE = 2KP = 14$. С друге стране, $EKLC$ је паралелограм, па важи $EC = KL = 5$, а тражена дужина износи $AC = 14+5 = 19$.



Ок 2017 3Б 2

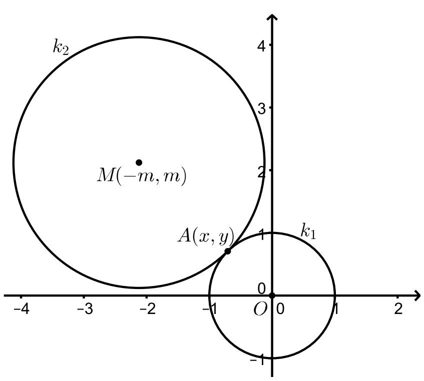
3. *Прво решење.* Другу једначину можемо расписати као $x^2+2mx+m^2+y^2-2my+m^2 = 1$, а користећи овде прву једначину, добијамо $4+2m(x-y)+2m^2 = 1$, тј. $2m(x-y) = -2m^2-3$. Одмах видимо да за $m = 0$ нема решења. Претпоставимо сада $m \neq 0$. Тада добијамо $x = y - \frac{2m^2+3}{2m}$. Уврстимо ово у прву једначину система, чиме добијамо $(y-\frac{2m^2+3}{2m})^2+y^2 = 4$, тј.

$$2y^2 - \frac{2m^2+3}{m}y + \frac{4m^4-4m^2+9}{4m^2} = 0.$$

Ова једначина има тачно једно решење ако и само ако је њена дискриминанта једнака 0, то јест:

$$0 = \frac{(2m^2+3)^2}{m^2} - 8\cdot\frac{4m^4-4m^2+9}{4m^2} = \frac{4m^4+12m^2+9-8m^4+8m^2-18}{m^2} = -\frac{4m^4-20m^2+9}{m^2}.$$

Дакле, уз смену $t = m^2$, имамо $4t^2-20t+9 = 0$, чија су решења $t_{1/2} = \frac{20\pm\sqrt{400-144}}{8} = \frac{20\pm 16}{8}$, тј. $t_1 = \frac{9}{2}$ и $t_2 = \frac{1}{2}$. Према томе, постоје четири могуће вредности параметра m: $m = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$ и $m = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.



Ок 2017 3Б 3

Друго решење. У координатној равни посматрајмо тачке $O(0,0)$, $A(x,y)$ и $M(-m,m)$. Тада важи $OA^2 = x^2+y^2$ и $MA^2 = (x+m)^2+(y-m)^2$, па из једнакости из поставке следи да је A тачка за коју важи $OA = 1$ и $MA = 2$. Другим речима, за дату вредност m тачка A је у пресеку кружница $k_1(O,1)$ и $k_2(M,2)$.

Решење (x,y) датог система је јединствено ако и само ако се кружнице k_1 и k_2 додирују, а то је еквивалентно услову $OM = 2\pm 1$, дакле $OM = 3$ или $OM = 1$. С обзиром на $OM = |m|\sqrt{2}$, следи $m = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$ или $m = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

4. Једини такав број је $n = 4$ (посматрани бројеви су тада 5, 7, 11, 13, 17 и 19).

Тврдимо да је неки од бројева $n+1$, $n+3$, $n+7$, $n+9$, $n+13$ и $n+15$ дељив са 5. Заиста, у зависности од тога да ли n при дељењу са 5 даје остатак 0, 1, 2, 3 или 4, дељив са 5 биће број $n+15$, $n+9$, $n+3$, $n+7$ односно $n+1$, редом. Дакле, пошто су посматрани бројеви по услову задатка сви прости, а међу њима постоји број дељив са 5, следи да неки број мора бити управо једнак 5. То је могуће очигледно само за бројеве $n+1$ и $n+3$. У првом случају добијамо $n = 4$, што је већ наведено решење. У другом случају добијамо $n = 2$, али тада имамо $n+7 = 9$, што није прост број, па ово није решење.

5. Нека је C број великих црвених куглица, c број малих црвених куглица, B број великих белих, а b број малих белих куглица. Тада су сви ови бројеви прости и важи $C+c+B+b = 67$. Да би збир четири проста броја био непаран, међу њима мора бити број 2 (јер је збир четири непарна броја паран). Како је 2 најмањи прост број, из трећег услова следи $b = 2$. Остаје $C+c+B = 65$. Пошто $5 \mid C+c$ (први услов), следи $5 \mid B$, па мора бити $B = 5$ (јер је B прост број). Сада из другог услова добијамо $C = B+b = 7$, а онда преостаје $c = 53$. Дакле, куглица у кутији има: 7 великих црвених, 53 мале црвене, 5 великих белих и 2 мале беле.

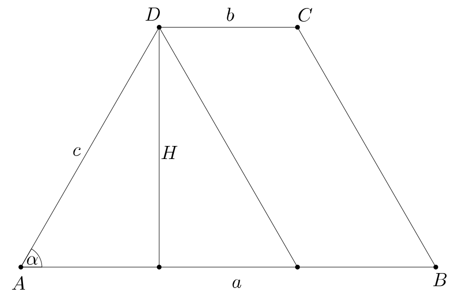
Четврти разред – Б категорија

1. Нека се 17^2 појављује под кореном k пута. Можемо записати

$$3\cdot 17^2 = 17^2+17^2+17^2 = \sqrt{17^2+17^2+17^2+\cdots+17^2+17^2+17^2} = \sqrt{k\cdot 17^2} = 17\sqrt{k},$$

па одатле следи $k=(3\cdot 17)^2 = 51^2 = 2601$.

2. *Прво решење.* Нека су a и b већа и мања основица тог трапеза, H његова висина, α угао на основици, P површина а O обим. Важи $a=b+2H\operatorname{ctg}\alpha$, а одатле $P=H\frac{a+b}{2}=H(b+H\operatorname{ctg}\alpha)$. Даље, пошто су краци овог трапеза једнаки $\frac{H}{\sin\alpha}$, имамо $O=\frac{2H}{\sin\alpha}+2b+2H\operatorname{ctg}\alpha = 2(\frac{H}{\sin\alpha}+b+H\operatorname{ctg}\alpha)$. Из малопређашње формуле за површину имамо $b+H\operatorname{ctg}\alpha=\frac{P}{H}=\frac{6\sqrt{3}}{H}$, па следи $O=2(\frac{H}{\sin\alpha}+\frac{6\sqrt{3}}{H})=2(\frac{2H}{\sqrt{3}}+\frac{6\sqrt{3}}{H})$, те се задатак своди на налажење минимума израза у загради. Ако тај израз означимо са $f(H)$, извод по H износи $f'(H)=\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{6\sqrt{3}}{H^2}$. Изједначавањем овога с нулом добијамо $\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}}{H^2}$, тј. $H^2=9$, па следи $H=3$ (због $H>0$). У овој тачки заиста се достиже минимум јер видимо да важи $f'(H)<0$ за $H\in(0,3)$, а $f'(H)>0$ за $H>3$. Тада добијамо $b=\frac{6\sqrt{3}}{3}-3\operatorname{ctg}60^\circ = 2\sqrt{3}-3\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$, $a=b+2H\operatorname{ctg}\alpha = 3\sqrt{3}$ и $O=8\sqrt{3}$.



Ок 2017 4Б 2

Друго решење. Уз ознаке као у првом решењу, нека је c крак. Пошто важи $\alpha=60^\circ$, уочавањем једнакостраничног троугла над једним краком добијамо $a=b+c$ и $H=\frac{c\sqrt{3}}{2}$. Зато имамо

$$6\sqrt{3}=P=\frac{c\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a+b}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}c(2b+c),$$

те закључујемо $c(2b+c)=24$. Даље, имамо $O=a+b+2c=2b+3c$, па применом неједнакости између аритметичке и геометријске средине добијамо

$$\frac{2b+3c}{2}=\frac{(2b+c)+(2c)}{2}\geqslant\sqrt{(2b+c)(2c)}=\sqrt{48},$$

тј. $O\geqslant 2\sqrt{48}=8\sqrt{3}$. Једнакост се заиста и достиже за $2b+c=2c$, тј. $c=2b$, па је минимална вредност обима $8\sqrt{3}$.

3. Тражени бројеви су највише четвороцифрени. Ако сваки такав број допунимо водећим нулама до укупно четири цифарска места (нпр. број 17 записиваћемо као 0017), тада, пошто се у броју појављује тачно једна цифра 1, за њу имамо избор од 4 позиције, а за сваку од преосталих позиција постоји по 6 могућности (све цифре осим 4, 8, 9 и 1). Према томе, тражених бројева има $4\cdot 6^3=864$.

4. Претпоставимо супротно: $2017^{2017}+19=n^k$ за неко $k\geqslant 2$. Пошто важи $2017\equiv 1 \pmod 8$, следи

$$2017^{2017}+19\equiv 1^{2017}+19=20\equiv 4 \pmod 8,$$

па је $2017^{2017}+19$ дељив са 4 али не и са 8. Дакле, како је посматрани број паран, једина могућност је $k=2$ (јер би за $k\geqslant 3$ он био дељив и са 8). Међутим, $2017^{2017}+19\equiv 1^{2017}+1=2 \pmod 3$, а ниједан потпун квадрат не даје остатак 2 при дељењу са 3 (могући остаци су $0^2=0$, $1^2=1$ и $2^2=4\equiv 1 \pmod 3$), па број $2017^{2017}+19$ није ни потпун квадрат. Тиме је задатак решен.

5. Сменом $x+1=t$ постављена једначина се своди на $(t-1)^4+(t+1)^4=2$, тј.

$$2=((t-1)^2)^2+((t+1)^2)^2=(t^2-2t+1)^2+(t^2+2t+1)^2=2t^4+12t^2+2,$$

а ово је даље еквивалентно са $0=t^4+6t^2=t^2(t^2+6)$. Решења ове једначине су $t_1=t_2=0$, $t_{3/4}=\pm i\sqrt{6}$. Враћањем смене $x=t-1$ добијамо скуп свих решења за x: $x\in\{-1,-1+i\sqrt{6},-1-i\sqrt{6}\}$.