Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

21. јануар 2017.

Први разред – А категорија

1. У парку облика квадрата чија дужина странице износи 1 км постоји 4567 стабала пречника не већег од 50 цм (свако стабло се читаво налази у парку). Доказати да се у том парку може наћи простор величине 10 м $\times$ 20 м унутар ког се не налази ниједно стабло (нити део стабла).

2. У четвороуглу $ABCD$ важи $\measuredangle ABC = 104^\circ$, $\measuredangle ADC = 128^\circ$ и $AB = BC = 2$. Израчунати дужину дијагонале BD.

3. Решити једначину

$$12^x + 10^y = 7102^z$$

у скупу природних бројева.

4. За четворку тачака A, B, C, D у равни, међу којима никоје три нису колинеарне, нека $f(A, B, C, D)$ означава меру највећег угла који образују ове тачке (од укупно 12 таквих углова). Одредити $\min f(A, B, C, D)$, где се минимум узима над свим посматраним четворкама тачака.

5. Одредити колико различитих решења има једначина

$$||\cdots|||x| - 1| - 2|\cdots - 2016| - 2017| = 2017.$$

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

21. јануар 2017.

Други разред – А категорија

1. На ливади се налазе 3 мравињака: A, B и C. Растојање између мравињака A и B износи 260 мм а између мравињака B и C износи 1200 мм, и притом важи $\measuredangle ABC = 60^\circ$. Из мравињака A креће мрав a ка мравињаку B, идући праволинијски, крећући се брзином 1 $\frac{\text{мм}}{\text{с}}$. У истом тренутку из мравињака B креће мрав b ка мравињаку C, такође праволинијски, идући брзином 3 $\frac{\text{мм}}{\text{с}}$. У ком тренутку ће растојање између мрава a и b бити минимално?

2. Нека је T тежиште $\triangle ABC$, и нека је t произвољна права кроз T таква да су темена A и B с једне њене стране, а теме C с друге. Нека су тачке A_0, B_0 и C_0 ортогоналне пројекције тачака A, B и C, редом, на праву t. Доказати:

$$AA_0 + BB_0 = CC_0.$$

3. Пчела се креће по бесконачном саћу (равни поплочаној правилним шестоугловима). Пчела полази са унапред утврђеног шестоугла, у сваком кораку мора прећи на суседан шестоугао (шестоуглови су суседни ако имају заједничку ивицу), и не сме доћи на шестоугао на ком је већ била. За било који природан број n, означимо са x_n број могућих путања од n корака. Доказати:

$$2 \cdot 3^n \leqslant x_n \leqslant 6 \cdot 5^{n-1}.$$

4. Решити систем једначина:

$$\lfloor 2x \rfloor + \lfloor x \rfloor + \lfloor 7x \rfloor = 2017;$$
$$3\{x\}\{5x\} = 4\{2x\}\{6x\}.$$

(Са $\lfloor x \rfloor$ означавамо највећи цео број не већи од x, а са $\{x\}$ означавамо $x - \lfloor x \rfloor$.)

5. Одредити за које природне бројеве n постоје природни бројеви $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ такви да важи

$$x^2 = 2(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2).$$

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

21. јануар 2017.

Трећи разред – А категорија

1. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$. За уочену тачку O унутар њега, нека је p_O права кроз O паралелна са AB, и нека су P_O и Q_O тачке пресека праве p_O са страницама AD и BC, редом; слично, нека је q_O права кроз O паралелна са CD, и нека су R_O и S_O тачке пресека праве q_O са страницама AD и BC, редом. Доказати да су следећи услови еквивалентни:

- постоји тачка $O \in \operatorname{int} ABCD$ за коју важи $P_O O \cdot OQ_O = R_O O \cdot OS_O$;
- за сваку тачку $O \in \operatorname{int} ABCD$ важи $P_O O \cdot OQ_O = R_O O \cdot OS_O$.

(Са $\operatorname{int} ABCD$ означавамо унутрашњост четвороугла $ABCD$.)

2. Доказати да је за свако $n \in \mathbb{N}$ број

$$2^n + 3^{n+3} + 5^n + 7^{n+4}$$

сложен.

3. Дуле се креће по бесконачној шаховској табли (равни поплочаној квадратима) а пчела по бесконачном саћу (равни поплочаној правилним шестоугловима). Обоје крећу са унапред утврђеног почетног поља („поља“ су квадрати за Дулета, а шестоуглови за пчелу), у сваком кораку морају прећи на суседно поље (поља су суседна ако имају заједничку ивицу) и не смеју доћи на поље на ком су већ били. За ма који природан број n, доказати да пчела има више могућих путања од n корака него Дуле.

4. Нека су задати реални бројеви $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ и $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ такви да за свако $x \in \mathbb{R}$ важи

$$|x-b_1| + |x-b_2| + \cdots + |x-b_n| \leqslant |x-a_1| + |x-a_2| + \cdots + |x-a_n|.$$

Доказати:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n,$$

и, за свако k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k \leqslant b_1 + b_2 + \cdots + b_k.$$

5. На кружници k уочене су тачке A, B, C и D у том поретку. Праве AB и CD секу се у тачки E, а праве AD и BC у тачки F. Уочене су кружнице k_1 и k_2, с центрима у тачкама E и F, редом, нормалне на кружницу k. Доказати да су кружнице k_1 и k_2 међусобно нормалне.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

21. јануар 2017.

Четврти разред – А категорија

1. За реалне бројеве $x, y \in [e^{-3}, e]$ доказати неједнакост

$$\left|\ln \frac{x^x}{y^y}\right| \leqslant 2|x-y|.$$

2. Ако је a паран број, доказати да

$$(a+1)^{2017} \mid a^{(a+1)^{2016}}+1.$$

3. На свакој од n позиција у сали за физичко стоји по један ученик. Са позиције P_1 може се *сигурно додати лопта* на позицију P_2 ако се у кругу са пречником P_1P_2 не налази ниједна од осталих позиција. Нека су Ивица и Марица двоје ученика у сали, и нека се лопта иницијално налази код Ивице. Доказати да, на којим се год они позицијама налазили, постоји низ сигурних додавања којим се може проследити лопта од Ивице до Марице.

4. Нека је $\mathbb{R}^+$ скуп свих позитивних реалних бројева. Наћи све функције $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такве да важи

$$f\big(x+f(y)+f(f(z))\big) = yf\big(1+f(f(y))(x+z)\big) \quad \text{за све } x, y, z \in \mathbb{R}^+.$$

5. Дат је оштроугли $\triangle ABC$. Нека је D пресек симетрале $\measuredangle A$ и странице BC, а E пресек симетрале $\measuredangle B$ и странице AC. Нека су D_0 и E_0 ортогоналне пројекције тачака D и E, редом, на страницу AB. Означимо са A_1 тачку осносиметричну тачки A у односу на праву CE_0, а са B_1 тачку осносиметричну тачки B у односу на праву CD_0. Доказати да $\triangle AA_1C$ и $\triangle BB_1C$ немају заједничких тачака осим тачке C.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

21. јануар 2017.

Први разред – Б категорија

1. Дате су цифре a и b, различите међусобно и различите од нуле. Колико има четвороцифрених бројева дељивих са 11 који се могу записати искључиво помоћу цифара a и b (не морају обе цифре бити употребљене у запису)?

2. Дати су скупови A, B и C такви да важи:

- $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$;
- A је скуп свих природних бројева не већих од 100 који су дељиви са 2;
- B је скуп свих природних бројева не већих од 100 који су дељиви са 3;
- $B \cap C$ је скуп свих природних бројева не већих од 100 чији је збир цифара једнак 9;
- $(A \cap C) \setminus B$ је скуп свих двоцифрених бројева који нису дељиви са 3 и чија је цифра јединица једнака 4.

Одредити број елемената скупа C.

3. У једној кутији се налазе куглице плаве, зелене и црвене боје. Ако желимо да извучемо одређен број куглица а да будемо сигурни да међу њима постоји бар по једна куглица сваке боје, неопходно је извући 11 куглица. Ако желимо да будемо сигурни да међу извученим куглицама постоји куглица зелене боје, неопходно је извући 10 куглица. Ако желимо да будемо сигурни да међу извученим куглицама постоји куглица црвене боје, неопходно је извући 8 куглица. Колико куглица од сваке боје има у кутији?

4. На полукружници чији је пречник AB уочене су тачке P и Q. У пресеку правих AP и BQ добијена је тачка M, а у пресеку правих AQ и BP добијена је тачка N. Доказати: $MN \perp AB$.

5. У овом тренутку A има три пута толико година колико је B имао када је A имао толико година колико сада има B. Када B буде имао толико година колико сада има A, њих двојица ће у збиру имати 70 година. Колико свако од њих има година?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

21. јануар 2017.

Други разред – Б категорија

1. Дијагонале конвексног четвороугла $ABCD$ секу се у тачки O. Доказати да центри кружница описаних око $\triangle ABO$, $\triangle BCO$, $\triangle CDO$ и $\triangle DAO$ образују темена паралелограма.

2. Старац има одређен број јабука и о њима је изрекао следеће реченице.

- Ако ми дође двоје унука, нећу моћи да им поделим јабуке на једнак број обома.
- Ако ми дође троје унука, моћи ћу да им поделим јабуке на једнак број свима.
- Ако ми дође четворо унука, моћи ћу да им поделим јабуке на једнак број свима.
- Ако ми дође петоро унука, моћи ћу да им поделим јабуке на једнак број свима.
- Ако ми дође шесторо унука, нећу моћи да им поделим јабуке на једнак број свима.

Међутим, старац је мало заборaван, па му тачно једна реченица није истинита. При овим условима, колико најмање јабука може имати старац?

3. Одредити највећи прост број чије су све цифре различите такав да се при свакој пермутацији његових цифара добија поново прост број.

4. За које вредности реалног параметра m једначина

$$x^2 - (m+1)x + 2m - 4 = 0$$

има реална решења, а да је притом збир њихових квадрата најмањи могућ?

5. Решити систем једначина:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 9; \\ y^2 + z^2 &= 16; \\ y^2 &= xz. \end{aligned}$$

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

21. јануар 2017.

Трећи разред – Б категорија

1. Одредити све реалне бројеве x за које важи

$$\sin x = \sin 2x = \sin 3x = \cdots = \sin 2017x.$$

2. Пет ученика се такмичи у трци на 10 км. Познато је да је после 5 км први био Аца, други Бојан, трећи Вук, четврти Горан а пети Дејан, док је на крају први био Вук, други Дејан, трећи Аца, четврти Горан а пети Бојан. Колико је најмање различитих распореда било током ове трке? (Не рачунају се распореди у којима су неки ученици изједначени, и сматра се да се током трке не дешава ситуација да у истом тренутку два ученика престижу трећег.)

3. Решити систем једначина:

$$\begin{aligned} x - y + xy &= 17; \\ x^2 + y^2 &= 34. \end{aligned}$$

4. Дијагонале четвороугла деле тај четвороугао на четири троугла са целобројним површинама. Да ли је могуће да се производ тих површина завршава на 2017?

5. Решити једначину у скупу целих бројева:

a) $m^2n^6 - m^4n^4 + m^6n^2 = 2017$;
b) $m^2n^6 - m^4n^4 + m^6n^2 = 2016$.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

21. јануар 2017.

Четврти разред – Б категорија

1. Наћи максималну вредност функције $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$ на интервалу $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

2. Одреди најмањи природан број који је дељив бројем 13, а при дељењу бројевима 2, 3, ..., 11, 12 даје остатак 1.

3. Нека су a, b, c дужине страница $\triangle ABC$ наспрам темена A, B, C, редом, и нека оне задовољавају

$$a^2 = b^2 + bc.$$

Доказати: $\measuredangle A \cong 2\measuredangle B$.

4. Решити систем једначина:

$$x^2 + 2yz = 1;$$
$$y^2 + 2xz = 2;$$
$$z^2 + 2xy = 1$$

у скупу реалних бројева.

5. Ана је три пута бацала коцкицу и у сваком бацању добила природан број од 1 до 6. Она је производ та три (не нужно различита) броја рекла Петру, а збир Зорану (при чему обојица знају шта представљају обе саопштене вредности). Између Петра и Зорана се водио следећи разговор:

– Петар: „Не могу са сигурношћу да одредим сва три броја која је Ана добила.“

– Зоран: „Знао сам да не можеш.“

– Петар: „Иако досад нисам знао чак ни који је најмањи број који је Ана добила, захваљујући твом коментару сад знам.“

Која је три броја (у некој пермутацији) Ана добила?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.