Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Државно такмичење из математике
ученика основних школа
23.04.2016.

VI разред

1. Дијагонале делтоида са његовим страницама заклапају осам углова. Два од тих осам углова су 78° и 43°. Одреди углове делтоида.

2. Нека су $a_1 < a_2 < ... < a_{2015}$ узастопни цели бројеви такви да је

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + a_{2013} - a_{2014} + a_{2015} = 2016$$

(наизменично се мењају знакови + и –). Израчунај вредност израза

$$\frac{a_{1008}}{4} \cdot \frac{a_{1948}}{a_{866} - a_{127}}.$$

3. На табли су написана два природна броја. Марко је помножио први број са збиром цифара другог и добио број

2016201620162016201620162016,

а Илија је помножио други број са збиром цифара првог и добио број

2017201720172017201720172017.

Докажи да је бар један од њих погрешио у рачуну.

4. У равни је дато 27 тачака, таквих да је 7 обојено црвеном, а по 10 плавом и зеленом бојом. Ако међу овим тачкама не постоје 3 тачке које припадају једној правој, колико је одређено троуглова чија су темена обојена са тачно две различите боје?

5. Троугао *ABC* је оштроугли. Нека су *AD* и *BE* висине, *H* ортоцентар, *M* средиште странице *AB* и *G* средиште дужи *CH*. Докажи да је права *MG* симетрала дужи *DE*.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 180 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Државно такмичење из математике
ученика основних школа
23.04.2016.

VI разред

1. Дијагонале делтоида са његовим страницама заклапају осам углова. Два од тих осам углова су 78° и 43°. Одреди углове делтоида.

2. Нека су $a_1 < a_2 < ... < a_{2015}$ узастопни цели бројеви такви да је

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + a_{2013} - a_{2014} + a_{2015} = 2016$$

(наизменично се мењају знакови + и –). Израчунај вредност израза

$$\frac{a_{1008}}{4} \cdot \frac{a_{1948}}{a_{866} - a_{127}}.$$

3. На табли су написана два природна броја. Марко је помножио први број са збиром цифара другог и добио број

2016201620162016201620162016,

а Илија је помножио други број са збиром цифара првог и добио број

2017201720172017201720172017.

Докажи да је бар један од њих погрешио у рачуну.

4. У равни је дато 27 тачака, таквих да је 7 обојено црвеном, а по 10 плавом и зеленом бојом. Ако међу овим тачкама не постоје 3 тачке које припадају једној правој, колико је одређено троуглова чија су темена обојена са тачно две различите боје?

5. Троугао *ABC* је оштроугли. Нека су *AD* и *BE* висине, *H* ортоцентар, *M* средиште странице *AB* и *G* средиште дужи *CH*. Докажи да је права *MG* симетрала дужи *DE*.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 180 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Државно такмичење из математике ученика основних школа
23.04.2016.

VII разред

1. Нека су a, b и c цифре такве да је један од двоцифрених бројева $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ и $\overline{ca}$ аритметичка средина друга два. Докажи да је

$$a = b = c.$$

2. На једном шаховском турниру сваки играч је играо са сваким другим играчем по две партије. Познато је да су непосредно пред почетак турнира два или три играча отказала учешће, па је одиграно тачно 84 партије мање него што је планирано. Колико играча је остало на турниру?

3. Одреди све тројке позитивних реалних бројева a, b и c такве да је

$$abc = 1 \quad \text{и} \quad ab + ac + bc + a + b + c = 6.$$

4. Нека су A' и B' подножја нормала из крајњих тачака A и B пречника AB датог круга k на произвољну тангенту тог круга. Докажи да је збир дужи $AA' + BB'$ константан, тј. да не зависи од избора тангенте.

5. Дат је квадрат $ABCD$ странице a. На страници AB дата је тачка E таква да је $AE : EB = 2 : 1$. Нека је тачка F произвољна тачка дијагонале BD. Докажи да је

$$AF + EF \geq \frac{a\sqrt{10}}{3}.$$

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 180 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Државно такмичење из математике ученика основних школа
23.04.2016.

VII разред

1. Нека су a, b и c цифре такве да је један од двоцифрених бројева $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ и $\overline{ca}$ аритметичка средина друга два. Докажи да је

$$a = b = c.$$

2. На једном шаховском турниру сваки играч је играо са сваким другим играчем по две партије. Познато је да су непосредно пред почетак турнира два или три играча отказала учешће, па је одиграно тачно 84 партије мање него што је планирано. Колико играча је остало на турниру?

3. Одреди све тројке позитивних реалних бројева a, b и c такве да је

$$abc = 1 \quad \text{и} \quad ab + ac + bc + a + b + c = 6.$$

4. Нека су A' и B' подножја нормала из крајњих тачака A и B пречника AB датог круга k на произвољну тангенту тог круга. Докажи да је збир дужи $AA' + BB'$ константан, тј. да не зависи од избора тангенте.

5. Дат је квадрат $ABCD$ странице a. На страници AB дата је тачка E таква да је $AE : EB = 2 : 1$. Нека је тачка F произвољна тачка дијагонале BD. Докажи да је

$$AF + EF \geq \frac{a\sqrt{10}}{3}.$$

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 180 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Државно такмичење из математике ученика основних школа
23.04.2016.

VIII разред

1. Одреди све природне бројеве n такве да је
$$2^4 \cdot 3^{16} + 5^2 \cdot 3^{14} + 3^n$$
квадрат неког природног броја.

2. Одреди непознати број $\overline{xyzt}$ ако за његове цифре важе следеће једнакости:
$$xt + zt = 18,\quad xz + tz = 8,\quad xz + xt = 14,\quad x \cdot y \cdot z \cdot t = 0.$$

3. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ чија је запремина 1000cm^3. Нека су E, F, G, H, I, J редом средишта ивица BC, CD, DD_1, D_1A_1, A_1B_1, B_1B. Докажи да тачке E, F, G, H, I, J припадају једној равни и израчунај површину и запремину пирамиде $AEFGHIJ$.

4. Перица и Јоца су ушли у учионицу и видели да је на табли написано

СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Они су се договорили да играју следећу игру. Наизменично ће брисати слова тог записа, при чему се једним потезом може избрисати само неколико истих слова (бар једно и не морају сва иста слова да се избришу). Победник је играч који избрише последње слово. Перица почиње први. Који играч има победничку стратегију?

5. Права p садржи ортоцентар H оштроуглог троугла ABC и сече његове странице AB и CA, при чему страницу CA у тачки P. Права q такође садржи тачку H, нормална је на p и сече странице AB и BC, при чему страницу BC у тачки Q. Права кроз A паралелна са q и права кроз B паралелна са p секу се у тачки R. Докажи да су тачке P, Q и R колинеарне.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 180 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Државно такмичење из математике ученика основних школа
23.04.2016.

VIII разред

1. Одреди све природне бројеве n такве да је
$$2^4 \cdot 3^{16} + 5^2 \cdot 3^{14} + 3^n$$
квадрат неког природног броја.

2. Одреди непознати број $\overline{xyzt}$ ако за његове цифре важе следеће једнакости:
$$xt + zt = 18,\quad xz + tz = 8,\quad xz + xt = 14,\quad x \cdot y \cdot z \cdot t = 0.$$

3. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ чија је запремина 1000cm^3. Нека су E, F, G, H, I, J редом средишта ивица BC, CD, DD_1, D_1A_1, A_1B_1, B_1B. Докажи да тачке E, F, G, H, I, J припадају једној равни и израчунај површину и запремину пирамиде $AEFGHIJ$.

4. Перица и Јоца су ушли у учионицу и видели да је на табли написано

СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Они су се договорили да играју следећу игру. Наизменично ће брисати слова тог записа, при чему се једним потезом може избрисати само неколико истих слова (бар једно и не морају сва иста слова да се избришу). Победник је играч који избрише последње слово. Перица почиње први. Који играч има победничку стратегију?

5. Права p садржи ортоцентар H оштроуглог троугла ABC и сече његове странице AB и CA, при чему страницу CA у тачки P. Права q такође садржи тачку H, нормална је на p и сече странице AB и BC, при чему страницу BC у тачки Q. Права кроз A паралелна са q и права кроз B паралелна са p секу се у тачки R. Докажи да су тачке P, Q и R колинеарне.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 180 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.