ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА 2019/2020.

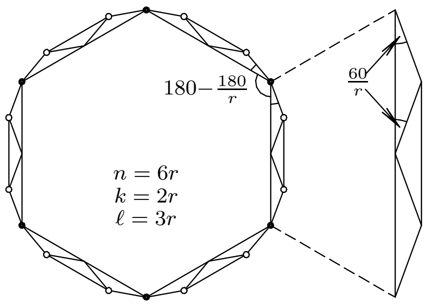
Решења

1А.1. Ако је нпр. $a = b$, онда је $b + c = c + d$, тј. $b = d$, а одатле $c + d = e + a$, тј. $c = e$, али онда је $d + e = a + b$, тј. $e = a$, па је $a = b = c = d = e$. Истом закључку водило би и $b = c$ итд. Зато надаље сматрамо да је $a \neq b \neq c \neq d \neq e \neq a$.

Нека је (без смањења општости) $a < b$. Ако је $b < c$, онда је $b + c > c + d > d + e$, одакле добијамо $b > d$ и $c > e$, али тада из $b(c + d) = d(e + a) < b(c + a)$ следи $d < a$. Сада из $a(b+c) = d(e+a) < a(e+b)$ следи $c < e$, што је контрадикција. Дакле, $b > c$. Настављајући на сличан начин, закључујемо да важи $a < b > c < d > e < a > b$, а и то је немогуће.

1А.2. Први играч има победничку стратегију. Он у своја прва два потеза треба да обезбеди да цифре 3 и 9 буду искоришћене. Тада је други играч принуђен да у свом последњем потезу употреби цифру 1 или 7. Међутим, први може да се својим трећим потезом побрине да и овако добијени бројеви буду дељиви са 3. Довољно је да другоме препусти број који даје остатак 2 при дељењу са 3. Ако је из сваке класе остатака доступна бар по једна цифра, он то свакако може постићи, а у јединином преосталом случају, када су искоришћене четири цифре $0, 3, 6, 9$, може да употреби цифру 2.

1А.3. Нека је $n = 6r$. Тражени n-тоугао има све углове једнаке $180° - \frac{60°}{r}$. Почнимо од правилног $2r$-тоугла. Како је његов унутрашњи угао једнак $180° - \frac{180°}{r}$, довољно је на сваку његову страницу накалемити једнакокраки трапез са углом на основи $\frac{60°}{r}$. Један овакав трапез може се склопити од три троугаона одсечка правилног $3r$-тоугла, чиме је конструкција примера готова.



1А.4. Дати број је једнак $M = x^3 + ax^2 + bx + c$, где је $x = 10^{n+1}$. Нека је $M = (y-1)y(y+1)$. Како је $(x-1)x(x+1) < x^3$ и $(x+3)(x+4)(x+5) > x^3 + 10x^2$, мора бити $x + 1 \leqslant y \leqslant x + 3$. Тада имамо

$$\begin{aligned} x(x+1)(x+2) &= x^3+3x^2+2x &&= 10\ldots030\ldots0020\ldots000, \\ (x+1)(x+2)(x+3) &= x^3+6x^2+11x+6 &&= 10\ldots060\ldots0110\ldots006 \quad \text{за} \ \ n \geqslant 1, \\ (x+2)(x+3)(x+4) &= x^3+9x^2+26x+24 &&= 10\ldots090\ldots0260\ldots024 \quad \text{за} \ \ n \geqslant 1. \end{aligned}$$

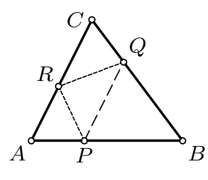
Видимо да за $n > 0$ једино случај $y = x + 1$ даје решење. Остаје да испитамо $n = 0$ и тада налазимо још једно решење: $x = 12$ и $M = 1716$.

Према томе, једина решења $(n; a, b, c)$ су $(0; 7, 1, 6)$ и $(n; 3, 2, 0)$ за $n \geqslant 0$.

2А.1. Ако Максим одабере тачку P у средишту дужи AB, онда коју год тачку Q да Мина одабере, важи $P_{PQA} + P_{PQC} = P_{PQB} + P_{PQC} = P_{PBC} = 1010$. Сада Максим може узети једно од темена A и C као тачку R тако да обезбеди површину $P_{PQR} \geqslant 505$.

С друге стране, ако је $AP = k \cdot AB$ $(0 \leqslant k \leqslant 1)$, Мина може да одабере тачку Q тако да је $PQ \parallel AC$. Тада ће бити $P_{PQR} = P_{PQA} = k \cdot P_{BQA} = 2020k(1-k) \leqslant 505$ (јер је $k(1-k) \leqslant \left(\frac{k+(1-k)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$), независно од избора тачке R.

Према томе, одговор је 505.



2А.2. Напишимо дату једнакост као квадратну једначину по z: $z^2 - (x +$

$y)z + (x^2 + xy + 2y^2 - 1) = 0$. Њена дискриминанта мора бити ненегативна:

$$D = (x+y)^2 - 4(x^2 + xy + 2y^2 - 1) \geqslant 0, \quad \text{тј.} \quad 7y^2 + 2xy + (3x^2 - 4) \leqslant 0.$$

У добијеној квадратној неједначини по y детерминанта опет мора бити ненегативна, па је $4x^2 - 28(3x^2 - 4) \geqslant 0$, тј. $5x^2 \leqslant 7$. Следи да је $x \geqslant -\frac{7}{\sqrt{35}}$.

При томе, за $x = -\frac{7}{\sqrt{35}}$ вредности $y = \frac{1}{\sqrt{35}}$ и $z = -\frac{3}{\sqrt{35}}$ су једнозначно одређене.

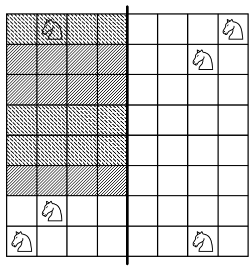
2A.3. Претпоставимо да је (p_n) један такав бесконачан низ. Бришући почетне чланове по потреби, можемо да сматрамо да су сви чланови већи од 3.

Ако је $p_1 \equiv \epsilon \pmod 3$ за $\epsilon = \pm 1$, онда мора бити и $p_2 = 2p_1 - \epsilon \equiv \epsilon \pmod 3$ (у супротном је $p_2 = 2p_1 + \epsilon \equiv 0 \pmod 3$), па индукцијом следи $p_{n+1} = 2p_n - \epsilon$ и одатле

$$p_n = 2^{n-1}p_1 - (2^{n-1} - 1)\epsilon \quad \text{за све } n \in \mathbb{N}.$$

Међутим, тада за $n = p_1$ по Фермаовој теореми важи $p_n \equiv 0 \pmod{p_1}$, па је p_n сложен број, што је контрадикција. Дакле, тражени низ не постоји.

2A.4. Шест поља **a1, b2, b8, h8, g7, g1** задовољавају услов задатка. Заиста, свих 6 поља су црна, па је од једног до другог увек потребан паран број потеза, али два потеза ни у једном пару нису довољна.



Претпоставимо да је могуће одабрати 7 поља. Тада у бар једној половини табле, рецимо левој (колоне **a-d**) има бар 4 поља. Поделимо ову половину на три групе поља:

(1°) врсте 1 и 2, (2°) врсте 3, 6 и 7 и (3°) врсте 4, 5 и 8.

Унутар једне групе, од сваког поља до сваког другог стиже се у највише три потеза - једини изузетак су поља **a1** и **b2** из групе (1°). Према томе, оба ова поља морају бити међу одабранима. Слично, и поља **a8** и **b7** морају бити међу одабранима, али то је немогуће, јер се од поља **b2** до поља **b7** може стићи у три потеза.

Према томе, одговор је 6.

3A.1. Имагинарни део десне и леве стране дате једначине је

$$-b = b \sum_{k=0}^{1009} (-1)^k \binom{2020}{2k+1} a^{2019-2k} b^{2k}.$$

Како је $\binom{2020}{2k+1} = \frac{2020}{2k+1}\binom{2019}{2k}$ паран број за свако k, ова једнакост узима облик $-b = 2A \cdot b$ за неки цео број A, па мора бити $b = 0$. Сада се једначина своди на $a^{2020} + |a| - a = 2^{2020}$, одакле је $a^{2020} \leqslant 2^{2020}$, тј. $|a| \leqslant 2$. Провером добијамо да је једино решење $z = a = 2$.

3A.2. Означимо са (x, y) поље у x-тој колони слева надесно и y-тој врсти одоздо нагоре. Потез значи скок са поља (x, y) на $(x+3, y+2)$ или $(x-2, y-1)$. При сваком потезу величина $A = 5y - 3x$ се увећава за 1.

Поља $(6,1), (7,1), (8,1), (8,2), (1,7), (1,8), (2,8), (3,8)$ су „изолована" - са њих паук може направити највише један потез. На остатку табле минимална вредност A је -11 на пољу $(7,2)$, а максимална 29 на пољу $(2,7)$, тако да паук може да направи највише 40 потеза. Овај број постиже тако што почне са поља $(7,2)$ и игра произвољно све до поља $(2,7)$.

Друго решење. Означимо поље $(7,2)$ бројем 0, а за $n>0$ бројем n означимо сва поља до којих се може стићи с неког поља означеног бројем $n-1$. Добијамо таблицу као на слици. У њој се налази и осам изолованих поља, а највећи број који се појављује је 40 на пољу $(2,7)$.

3А.3. Заменом места p и q ако је потребно, можемо да сматрамо да је $p=q+\delta>q$ и $(a_n\dots a_0)_p=(a_0\dots a_n)_q\pm 1$, уз (можда слабији) услов $n\geqslant 2^{q-1}-1$.

Имамо $p^n<(a_n\dots a_0)_p\leqslant(a_0\dots a_n)_q+1\leqslant q^{n+1}$, тј. $(\frac{p}{q})^n<q$. С друге стране,

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n\geqslant\left(1+\frac{\delta}{q}\right)^n=1+\frac{n\delta}{q}+\binom{n}{2}\frac{\delta^2}{q^2}+\cdots\geqslant 1+\frac{n\delta}{q},\quad \text{одакле је}\quad \delta<\frac{q^2-q}{2^{q-1}-1}.$$

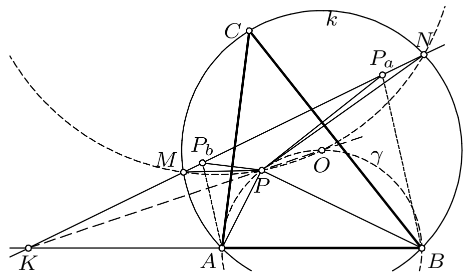
Међутим, одавде за $2\leqslant q\leqslant 5$ следи $\delta=1$, док се за $q\geqslant 6$ једноставном индукцијом доказује да важи $2^{q-1}>q^2-q+1$, те тада нема решења: заиста, ако то важи за q, онда је $2^q>2(q^2-q+1)>q^2+q+1$, тј. важи и за $q+1$. Дакле, $q\leqslant 5$ и $p=q+1$.

Преостале случајеве испитујемо ручно. За $(p,q)=(6,5)$ или $(5,4)$ имамо $n\geqslant 15$, односно $n\geqslant 7$, што није могуће, јер је у оба случаја $(\frac{p}{q})^n>q$. За $(p,q)=(3,2)$ у обзир долази само $n=1$, тј. $\pm1=(ab)_3-(ba)_2=2a-b$, одакле је $a=b=1$ и $m=4$. Најзад, за $(p,q)=(4,3)$ мора бити $n=3$, тј, $\pm1=(abcd)_4-(dcba)_3=63a+13b-5c-26d\geqslant 63\cdot1+13\cdot0-5\cdot2-26\cdot2=1$, те је једина могућност $(a,b,c,d)=(1,0,2,2)$ и $m=74$.

Једина решења су $m=4=(11)_3=(11)_2+1$ и $m=74=(1022)_4=(2201)_3+1$.

3А.4. Нека је O центар описаног круга k троугла ABC. Пошто је $\sphericalangle AOB=2\sphericalangle ACB=\sphericalangle APB$, тачке A, B, O и P леже на истом кругу γ. Тачка O је средиште лука APB овог круга, па је PO спољашња симетрала угла APB. Не умањујући општост, сматраћемо да је P на краћем луку AO круга γ.

С друге стране, како је $\sphericalangle P_aBP+\sphericalangle PAP_b=2\sphericalangle CBP+2\sphericalangle PAC=2(\sphericalangle APB-\sphericalangle ACB)=\sphericalangle APB$, важи $AP_b\parallel BP_a$. Ако права P_aP_b сече праву AB у тачки K, по Талесовој теореми имамо $AK:KB=AP_b:BP_a=AP:PB$, одакле следи да и K лежи на спољашњој симетрали угла APB. Дакле, праве AB, OP и P_aP_b имају заједничку тачку K.



Сада потенција тачке K даје $KM\cdot KN=KA\cdot KB=KP\cdot KO$, одакле следи да тачке M, N, O и P леже на једном кругу. При томе је O средиште лука MPN, па је PO спољашња симетрала угла MPN. То значи да је $\sphericalangle MPK=\sphericalangle OPN$, а такође је и $\sphericalangle KPA=\sphericalangle BPO$, одакле следи $\sphericalangle MPA=\sphericalangle BPN$.

4А.1. Постоји. Једна таква функција је $f(x)=\sin\frac{x}{2}$. Заиста, тада је $f'(x)=\frac12\cos\frac{x}{2}$, $f''(x)=-\frac14\sin\frac{x}{2}$ и, уопште, индукцијом следи да за сваки цео број $k\geqslant 0$ важи

$$f^{(2k)}(x)=\frac{(-1)^k}{2^{2k}}\sin\frac{x}{2}\quad \text{и}\quad f^{(2k+1)}(x)=\frac{(-1)^k}{2^{2k+1}}\cos\frac{x}{2},$$

те је у оба случаја $|f^{(n)}(x)|\leqslant\frac{1}{2^n}$.

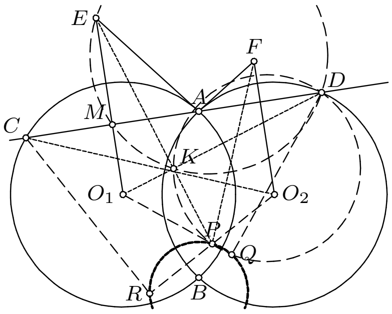
4А.2. Одмах имамо $f(1)=1$, а из услова задатка за $(m,n)=(2,1)$ добијамо $f(2)\in\{1,4\}$.

Претпоставимо прво да је $f(2)=1$. Услов задатка за $(m,n)=(x,1)$ и $(m,n)=(x,2)$ даје $(x+1)(x+2)\mid f(x)-1$ за све $x\in\mathbb{N}$, па како је $f(x)\leqslant x^2<(x+1)(x+2)$, мора бити $f(x)=1$.

Остаје случај $f(2)=4$. Тада услов задатка даје $x+1\mid f(x)-1$ и $x+2\mid f(x)-4$ за све $x\in\mathbb{N}$, па је $f(x)-x^2$ дељиво са $(x+1)(x+2)$, те због $f(x)\leqslant x^2$ следи $f(x)=x^2$ за све x.

Дакле, одговор су функције $f(x)\equiv 1$ и $f(x)\equiv x^2$.

4А.3. Довољно је доказати да су потенције тачака O_1 и O_2 у односу на описани круг троугла



PQR једнаке, тј. да је $O_P \cdot O_1Q = O_2P \cdot O_2R$.

Означимо са K и M редом подножја нормала из тачке E на праве O_1D и CD. Тачке D, K, P и Q леже на истој кружници, па је $O_1P \cdot O_1Q = O_1K \cdot O_1D$. Такође, и тачке D, E, M и K леже на истој кружници, па је $O_1K \cdot O_1D = O_1M \cdot O_1E$. Најзад, због $\triangle O_1MA \sim \triangle O_1AE$ је $O_1M \cdot O_1E = O_1A^2$. Према томе, $O_1P \cdot O_1Q = O_1A^2$.

Аналогно важи $O_2P \cdot O_2R = O_2A^2 = O_1A^2$, одакле следи тврђење.

4А.4. Почнимо испитивањем броја магичних скупова k дужи с крајевима у тачкама $P_1, \dots, P_{2k}$ на кругу обојеним наизменично црвено и плаво. Означимо овај број са c_k. Тачка P_1 се може спојити само с неком тачком P_j друге боје, те j мора бити парно: $j = 2i$ ($i = 1, 2, \dots, k$). На скуповима тачака $\{P_2, \dots, P_{2i-1}\}$ и $\{P_{2i+1}, \dots, P_{2k}\}$ има c_{i-1}, односно c_{k-i} магичних скупова дужи. Добијамо релацију

$$c_k = \textstyle\sum_{i=1}^{k} c_{i-1}c_{k-i}, \quad \text{уз услов} \quad c_1 = 1,$$

што је позната рекурентна релација за Каталанове бројеве: $c_k = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$.

У нашем случају свака тачка скупа $D = \{A_1, A_2, A_{2n+1}, A_{2n+2}, A_{4n+1}, A_{4n+2}\}$ може бити спојена само с тачком друге боје и друге парности индекса, дакле, с другом тачком скупа D. Тачке скупа D се могу овако (тј. „магично”) повезати на 5 начина:

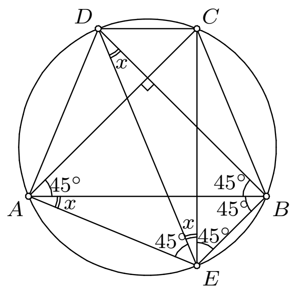
(1°) ако су то дужи $A_2A_{2n+1}, A_{2n+2}A_{4n+1}, A_{4n+2}A_1$, оне деле осталих $6n-6$ тачака на три скупа од по $2n-2$ тачака, те тада има c_{n-1}^3 магичних скупова дужи;

(2°) ако су то дужи $A_1A_2, A_{2n+1}A_{2n+2}, A_{4n+1}A_{4n+2}$, очигледно има c_{3n-3} магичних скупова;

(3°) сваки од преостала три начина даје по $c_{n-1}c_{2n-2}$ магичних скупова.

Укупан број магичних скупова је $c_{3n-3} + 3c_{2n-2}c_{n-1} + c_{n-1}^3$.

1Б.1. Трапези $ABCD$, $ACBE$ и $DEBC$ су једнакокраки, јер су тетивни. Из $AC \perp BD$ добијамо $2\sphericalangle CAB = \sphericalangle CAB + \sphericalangle ABD = 90°$, тј. $\sphericalangle CAB = 45°$. Такође је $\sphericalangle ABE = \sphericalangle BEC = \sphericalangle DEA = 45°$ (углови над једнаким тетивама AE, BC и DA). Даље, ако означимо $\sphericalangle EAB = x$, онда је и $\sphericalangle CED = \sphericalangle EDB = x$ (углови над једнаким тетивама CD и EB). Сада је збир углова у троуглу ABE једнак $3 \cdot 45° + 2x = 180°$, одакле је $x = 22{,}5°$.



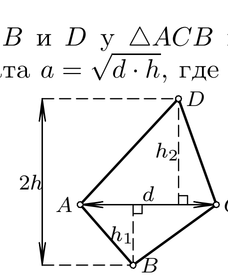
Према томе, углови троугла ABE су $\sphericalangle A = 22{,}5°$, $\sphericalangle B = 45°$ и $\sphericalangle E = 112{,}5°$.

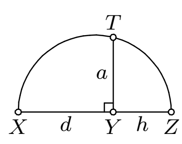
1Б.2. Ако је $n > 1$, сваки од сабирака је паран, па је и дати број паран (и већи од 2) и самим тим сложен.

Ако је $n = 1$, дати број је једнак $21! + 2020! + 7$, што је дељиво са 7 (и веће од 7) и самим тим сложен број.

1Б.3. Нека је $d = AC$, а h_1 и h_2 редом висине из темена B и D у $\triangle ACB$ и $\triangle ACD$. Тада је $P_{ABCD} = \frac{1}{2}d(h_1 + h_2)$, па је страница траженог квадрата $a = \sqrt{d \cdot h}$, где је $h = \frac{h_1+h_2}{2}$.

Дужину a лако конструишемо. Одаберимо тачке X, Y и Z у том поретку на правој тако да је $XY = d$ и $YZ = h$. Нека нормала из Y на XZ сече полукруг над пречником XZ у тачки T. Тада је $YT = \sqrt{YX \cdot YZ} = a$.





1Б.4. Испитаћемо за које вредности p, q, r, s, t је $F = \perp$. Знамо да је $(x \Rightarrow y) = \perp$ само ако је

$x = \top$ и $y = \bot$. Дакле, мора бити $\big((p \Rightarrow q) \Rightarrow t\big) = \top$ и $\big((r \Rightarrow t) \Rightarrow (s \Rightarrow t)\big) = \bot$. Из друге једнакости следи да је $(r \Rightarrow t) = \top$ и $(s \Rightarrow t) = \bot$, а одатле је опет $s = \top$ и $t = \bot$, што због $\big((p \Rightarrow q) \Rightarrow t\big) = (r \Rightarrow t) = \top$ даје и $(p \Rightarrow q) = r = \bot$. Најзад, одатле је $p = \top$ и $q = \bot$.

Све у свему, $F = \bot$ само за $(p, q, r, s, t) = (\top, \bot, \bot, \top, \bot)$. Следи да исказна слова q, r и t имају жељену особину, док је p и s немају.

1Б.5. Путања која завршава у крајњој десној колони састоји се од два потеза надесно и $k \leqslant 5$ потеза нагоре. За дато k оваква путања има $k+2$ потеза међу којима се позиције два потеза нагоре могу одабрати на $\binom{k+2}{2}$ начина. Укупну вредност A добијамо сабирањем за $k = 0, 1, \ldots, 5$: $A = \binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}+\binom{6}{2}+\binom{7}{2} = 1+3+6+10+15+21 = 56$.

Путања која завршава у крајњој горњој врсти састоји се од пет потеза нагоре и $j \leqslant 2$ потеза надесно. За дато j оваква путања има $j+5$ потеза међу којима се позиције j потеза надесно могу одабрати на $\binom{j+5}{j}$ начина. Укупну вредност B добијамо сабирањем за $j = 0, 1, 2$: $B = \binom{5}{0}+\binom{6}{1}+\binom{7}{2} = 1+6+21 = 28$. Веће је A.

2Б.1. Камион у коме нема слона може се одабрати на 4 начина, а слонови се могу распоредити у преостала три камиона на 6 начина. Остаје да распоредимо људе.

(1°) Ако у једном камиону има троје људи, то мора бити камион у коме је Перса. Ово троје људи могу се одабрати на $\binom{6}{3} = 20$ начина, а остало троје се могу распоредити на 6 начина. То је $20 \cdot 6 = 120$ начина.

(2°) Ако се у два камиона вози по двоје људи, један од тих камиона је Персин, а други се бира на 3 начина. Персини пратиоци се могу одабрати на $\binom{6}{2} = 15$ начина, двоје путника у другом камиону на $\binom{4}{2} = 6$ начина, а преостало двоје се могу распоредити на два начина. То је укупно $3 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 2 = 540$ начина.

Укупно има $4 \cdot 6 \cdot (120 + 540) = 15\,840$ начина.

2Б.2. Ако странице троугла означимо са a, b и c, имамо

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab} \geqslant 2\sqrt{2P}.$$

На исти начин имамо и $a + c \geqslant 2\sqrt{2P}$ и $b + c \geqslant 2\sqrt{2P}$. Сабирањем ове три неједнакости добијамо $2O = 2(a + b + c) \geqslant 6\sqrt{2P}$, што квадрирањем даје $O^2 \geqslant 18P$.

Напомена. У ствари, важи и јача неједнакост: $O^2 \geqslant 12\sqrt{3} \cdot P$.

2Б.3. Сабирање датих једначина даје квадратну једначину $y^2 - (2p-1)y + p^2 = 0$ чија су решења

$$y_1 = \frac{2p - 1 + \sqrt{1 - 4p}}{2} \quad \text{и} \quad y_2 = \frac{2p - 1 - \sqrt{1 - 4p}}{2}.$$

Да би ова решења била реална, мора бити $p \leqslant \frac{1}{4}$. Штавише, из прве једначине налазимо $x = 1 \pm \sqrt{y+1}$, што може бити реално само ако је $y_1 \geqslant -1$. Овај услов се може записати као $2p - 1 + \sqrt{1 - 4p} \geqslant -2$, тј.

$$\sqrt{1 - 4p} \geqslant -(2p + 1).$$

Ако је $p \geqslant -\frac{1}{2}$, ово је аутоматски тачно. Ако је $p < -\frac{1}{2}$, квадрирањем добијамо $1 - 4p \geqslant (2p + 1)^2$, тј. $4p^2 + 8p \leqslant 0$, одакле је $p \geqslant -2$.

Према томе, скуп тражених вредности p је интервал $[-2, \frac{1}{4}]$.

2Б.4. Претпоставимо да никоје три дате дужи не чине троугао. Нека су дате дужи у неопадајућем поретку $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_8$. Тада је по претпоставци $a_3 \geqslant a_1 + a_2 \geqslant 200$, $a_4 \geqslant a_2 + a_3 \geqslant 300$, $a_5 \geqslant a_3 + a_4 \geqslant 500$, $a_6 \geqslant a_4 + a_5 \geqslant 800$, $a_7 \geqslant a_5 + a_6 \geqslant 1300$ и $a_8 \geqslant a_6 + a_7 \geqslant 2100$. Ово је контрадикција, чиме је доказ завршен.

2Б.5. Видимо да су за $n \geqslant 4$ сви сабирци осим другог $(3!)$ дељиви са 4, па је дати број паран, а није дељив са 4, те не може бити квадрат.

За $n=3$ дати број је $21!+2020!+12$ и дељив је са 3, а није са 9, па опет није квадрат.

За $n=2$ дати број је $21!+2020!+8$ и дељив је са 8, а није са 16, па ни он није квадрат.

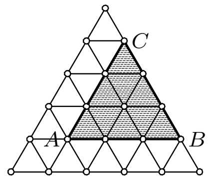
Најзад, за $n=1$ дати број је $21!+2020!+7$ и дељив је са 7, а није са 49, па ни он није квадрат.

3Б.1. Дати број се може записати као $111(1000x+y)$ и дељив је са $111=3\cdot 37$. Ако је он квадрат природног броја a, онда је и a дељиво са 3 и 37, тј. дељиво је са 111. Међутим, провером вредности $a \in \{111, 222, \dots, 999\}$ не налазимо ниједно решење, што значи да решења нема:

$$\begin{array}{lllll} 111^2 = 12321, & 222^2 = 49284, & 333^2 = 110889, & 444^2 = 197136, & 555^2 = 308025, \\ 666^2 = 443556, & 777^2 = 603729, & 888^2 = 788544, & 999^2 = 998001. & \end{array}$$

Друго решење. Потпун квадрат се увек завршава једном од цифара $0,1,4,5,6,9$. Цифра y не може бити 0 (број нула на крају мора бити паран), не може бити ни нека од цифара $1,5,9$ (иначе би био облика $4k+3$), као ни цифра 6 (иначе би био облика $4k+2$). Дакле, мора бити $y=4$. Међутим, ниједан од бројева $111444, 222444, \dots, 999444$ није потпун квадрат, што се директно проверава.

3Б.2. Посматрајмо неки троугао ABC састављен од јединичних троуглова. Саберимо бројеве у теменима ових јединичних троуглова. Резултат је по услову задатка дељив са 3. При томе су:



– бројеви у теменима A, B и C рачунати по једном;
– остали бројеви на дужима AB, BC и CA рачунати по 3 пута;
– бројеви унутар троугла ABC рачунати по 6 пута.

Према томе, и збир бројева само у теменима A, B и C је дељив са 3.

3Б.3. Означимо са $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ јединичне векторе дуж датих трију правих, а са $\vec{v}$ јединични вектор дуж тражене праве ℓ. Треба да важи $|\vec{v}\cdot\vec{a}| = |\vec{v}\cdot\vec{b}| = |\vec{v}\cdot\vec{c}|$. То се може записати као

$$\vec{v}\cdot(\vec{a}\pm\vec{b}) = \vec{v}\cdot(\vec{a}\pm\vec{c}) = 0$$

за неки од четири избора знакова $\pm$, што значи да је ℓ заједничка нормала на (неколинеарне) векторе $\vec{a}\pm\vec{b}$ и $\vec{a}\pm\vec{c}$. Како сваки избор знакова $\pm$ даје по једну такву праву, постоје тачно 4 тражене праве ℓ.

3Б.4. Означимо $x=\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots\sqrt{6}}}$ (2018 корена). Тражена неједнакост се може записати као

$$\frac{\sqrt{3-\sqrt{6+x}}}{\sqrt{3-x}} > \frac{1}{\sqrt{6}}. \tag{$*$}$$

За почетак, приметимо да је израз из задатка дефинисан, јер је

$$x < \underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots\sqrt{6+\sqrt{9}}}}}_{2018} = \underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots\sqrt{9}}}}_{2017} = \cdots = \sqrt{6+\sqrt{9}} = \sqrt{9} = 3.$$

Неједнакост($*$) квадрирањем и множењем са $3-x>0$ постаје $3-\sqrt{6+x} > \frac{1}{6}(3-x)$. Ово се заменом $t=\sqrt{6+x}$ своди на $6(3-t) > 9-t^2 = (3-t)(3+t)$, тј. $3+t<6$, што је тачно.

3Б.5. Играч који затекне пиона на седмом реду побеђује у наредном потезу. То значи да губи играч који буде принуђен да постави пиона на седми ред, а то ће бити само ако су већ сви пиони у шестом реду. Према томе, победник је онај након чијег потеза су сви пиони у шестом реду.

Поделимо пионе у четири пара. Бранкина стратегија је да, кад год Анка помери пиона из једног пара, она на исти начин помери и другог пиона из тог пара. Овако ће, све док не буду сви пиони у шестом реду, након сваког Анкиног потеза Бранка имати свој. Дакле, победиће Бранка.

4Б.1. Дати израз је једнак

$$\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ \sin 90^\circ = \frac{1}{2}\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{4}\sin 10^\circ(\cos 20^\circ - \cos 120^\circ) =$$

$$\frac{1}{4}\sin 10^\circ \cos 20^\circ + \frac{1}{8}\sin 10^\circ = \frac{1}{8}(\sin 30^\circ - \sin 10^\circ) + \frac{1}{8}\sin 10^\circ = \frac{1}{16},$$

што је рационалан број.

Друго решење. За сваки од углова $\varphi \in \{10^\circ, 50^\circ, -70^\circ\}$ важи $\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi = \frac{1}{2}$. Другим речима, сваки од бројева $x \in \{\sin 10^\circ, \sin 50^\circ, -\sin 70^\circ\}$ је решење једначине

$$8x^3 - 6x + 1 = 0,$$

а по Вијетовим формулама производ три решења ове кубне једначине је $-\frac{1}{8}$. Према томе, $\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{8}$, одакле следи да је вредност израза из задатка $\frac{1}{16}$.

4Б.2. Лева таблица је познати пример магичног квадрата са бројевима $1, 2, \dots, 9$. Пример за део (а) добијамо заменом ових бројева са $a{+}d, a{+}2d, \dots a{+}9d$, а пример за део (б) заменом бројевима $11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33$:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

(а)

$a{+}4d$	$a{+}9d$	$a{+}2d$
$a{+}3d$	$a{+}5d$	$a{+}7d$
$a{+}8d$	$a{+}d$	$a{+}6d$

(б)

21	33	12
13	22	31
32	11	23

4Б.3. Бројеви x^2+x и y^2+y су парни, па је број у првој једнакости непаран, тј. $a=0$. Такође, x^3-x и y^3-y су дељиви са 3, па број у другој једнакости није дељив са 3, тј. $b=0$. Дати систем се свео на

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y+1 = 5^c, \\ x^3+y^3-x-y+2 = 2^c. \end{cases}$$

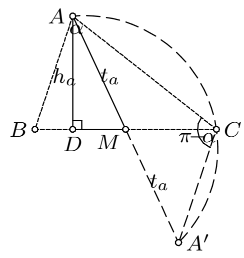
Из прве једначине је $c > 0$, па је

$$-3 \geqslant 2^c - 5^c = x^3 - x^2 - 2x + y^3 - y^2 - 2y + 1 = f(x) + f(y) + 1,$$

где је $f(t) = t(t-2)(t+1)$. Како је $f(1) = -2$ и $f(t) \geqslant 0$ за $t \geqslant 2$, мора бити $f(x) = f(y) = -2$, тј. $x = y = 1$. Тада је $c = 1$ и $(x, y, a, b, c) = (1, 1, 0, 0, 1)$ је једино решење задатка.

4Б.4. Троугао означавамо са ABC, подножје висине из A са D, а средиште странице BC са M. Посматрајмо тачку A' симетричну тачки A у односу на M. Тада је $AD = h_a$ и $AA' = 2t_a$, а како је $ABA'C$ паралелограм, важи и $\sphericalangle ABA' = \sphericalangle ACA' = 180^\circ - \alpha$, што значи да тачке B и C припадају кружним луковима над тетивом AA' са периферијским углом $180^\circ - \alpha$.

Почнимо конструкцију цртањем троугла ADM у коме је $AD = h_a$, $AM = t_a$ и $\sphericalangle ADM = 90°$. Затим пресликајмо тачку A симетрично у односу на M, до тачке A'. Сада конструишимо кружни лук над дужи AA' као тетивом и периферијским углом $180° - \alpha$. У пресеку овог лука са правом MD добијамо тачку C. Најзад, тачку B налазимо симетрично тачки C у односу на M.



Решење постоји под условом да је $t_a \geqslant h_a$ и јединствено је до на симетрију.

4Б.5. Приметимо да је $p(n) \leqslant n$ за све природне бројеве n. Заиста, ако је $n = \overline{a_k \ldots a_1 a_0}$, онда је

$$p(n) = a_0 a_1 \cdots a_k \leqslant 10^k a_k \leqslant n$$

(једнакост важи само када је n једноцифрен број). Међутим, из $0 \leqslant p(n) = n^2 - 21n - 40 \leqslant n$ следи $22 < \frac{21+\sqrt{601}}{2} \leqslant n \leqslant 11 + \sqrt{161} < 24$, па у обзир долази само $n = 23$. То заиста јесте решење.

Билтен такмичења 2019/2020.
штампаће се после Државног такмичења
по наруџбини, по цени од 150 динара.

Детаље ћете наћи на сајту ДМС.