



Б И Л Т Е Н

**53. ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА**

**МИНИСТАРСТВО ПРОСВЕТЕ, НАУКЕ И
ТЕХНОЛОШКОГ РАЗВОЈА РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ**

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

**МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА
РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ
ШКОЛСКЕ 2019/2020. ГОДИНЕ**

Београд, 2020.

Друштво математичара Србије
Кнез Михаилова 35/4
11000 Београд

Математичка такмичења
ученика основних школа Републике Србије
школске 2019/2020. године

Главни и одговорни уредник: мр Срђан Огњановић
Технички уредник: др Ненад Вуловић

Тираж: онлајн издање

САДРЖАЈ

ДРЖАВНА КОМИСИЈА ЗА ОРГАНИЗАЦИЈУ МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ	5
ОРГАНИЗАТОРИ ТАКМИЧЕЊА	6
ЗАДАЦИ	7
Школско такмичење	7
Општинско такмичење	10
Окружно такмичење	13
Државно такмичење	16
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА	19
Школско такмичење	19
Општинско такмичење	22
Окружно такмичење	26
Државно такмичење	30
ИЗВОД ИЗ ПРАВИЛНИКА о такмичењима ученика основних и средњих школа из математике у организацији Министарства просвете и науке Републике Србије и Друштва математичара Србије	35
СПИСАК УЧЕСНИКА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ ШКОЛСКЕ 2019/20. ГОДИНЕ	39

**ДРЖАВНА КОМИСИЈА ЗА ОРГАНИЗАЦИЈУ
МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА УЧЕНИКА
ОСНОВНИХ ШКОЛА РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ**

- (1) **Јожеф Б. Варга**
наставник математике у ОШ „Петар Кочић“ у Темерину
- (2) **Љиљана Врачар**
наставник математике у ОШ „Светозар Милетић“, Земун
- (3) **Др Ненад Вуловић**
ванредни професор Факултета педагошких наука у Јагодини
- (4) **Биљана Ђелић**
наставник математике у ОШ „Дринка Павловић“, Београд
- (5) **Милош Ђорић**
асистент Математичког факултета у Београду
- (6) **Милица Мисојчић**
наставница математике у Математичкој гимназији у Београду
- (7) **мр Срђан Огњановић, председник комисије**
професор математике у Рачунарској гимназији у Београду
- (8) **Др Ратко Тошић**
редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду
- (9) **Вељко Ћировић**
наставник математике у Ваљевској гимназији
- (10) **Др Марија Цветковић**
доцент Природно-математичког факултета у Нишу

ОРГАНИЗАТОРИ ТАКМИЧЕЊА

- Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
- Друштво математичара Србије

ДОМАЋИН ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА

Услед пандемије, 53. државно такмичење из математике ученика основних школа одржава се у четири града, на пет пунктова. Школе домаћини државног такмичења су:

- ОШ „Јован Миодраговић“, Београд;
- Математичка гимназија, Београд;
- ОШ „Чегар“, Ниш;
- ОШ „Жарко Зрењанин“, Нови Сад;
- ОШ „Милутин и Драгиња Тодоровић“, Крагујевац.

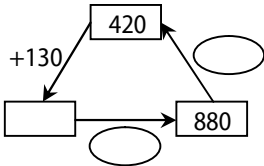
Друштво математичара Србије се захваљује колективима школа на преузимању организације државног такмичења.

ЗАДАЦИ

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ

07.11.2019. године

III разред

1. Напиши све троцифрене бројеве којима је збир цифара 10 и при томе је цифра стотина већа од цифре десетица, а цифра десетица већа од цифре јединица.
2. Уочи правило и продужи низ за још три члана
1, 2, 3, 5, 8, 13, ...
3. Прецртај слику на папир, који ћеш предати, па упиши одговарајуће бројеве и одговарајуће операције у за то предвиђеним пољима тако да сви добијени резултати буду тачни.
 
4. Напиши све бројеве мање од 100 који се записују са тачно две римске цифре.
5. Збир година старости свих ученика у једној групи је 56. За две године збир њихових година старости биће 70. Колико деце се налази у тој групи?

IV разред

1. а) Збир бројева 278 и 319 умањи за највећи непаран број друге стотине.
б) Од разлике бројева 230 и 58 одузми први паран следбеник броја 38.
2. Прецртај слику на папир који ћеш предати, па упиши одговарајуће цифре да сабирање буде тачно.

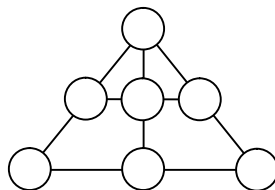
$$\begin{array}{r}
 \overline{2} \\
 + \overline{3} \overline{7} \overline{1} \\
 \hline
 \overline{5} \overline{1} \overline{2} \overline{9}
 \end{array}$$

3. Испод истог облика крију се исте цифре, а испод различитих облика, различите. Пронађи одговарајуће цифре тако да рачун буде тачан.

$$\begin{array}{r}
 \square \quad \triangle \\
 + \quad \triangle \quad \bigcirc \\
 \quad \bigcirc \quad \square \\
 \hline
 \square \quad \triangle \quad \bigcirc
 \end{array}$$

4. Колико има природних бројева чији је производ цифара 14 и збир цифара 11? Одреди највећи од тих бројева.

5. Прецртај на папир, који ћеш предати, слику и упиши бројеве од 1 до 7 у кругове тако да збир три броја из кругова на истој правој буде увек 12.



V разред

1. Израчунај вредност израза A , B , $A : B$, $A \cdot B$, ако је
 $A = 840 : (200 - 12 \cdot 15)$ и $B = 12 + 840 : 60 - 20$.
2. Колико коцки ивице 4cm треба ставити једну на другу да би се добио квадар површине 352cm²?
3. Одреди најмањи и највећи четвороцифрени природан број чија је цифра десетица 5 и који је дељив са 6.
4. Ако бројеве 293 и 671 поделимо једним истим природним бројем добићемо редом остатке 7 и 8. Одреди делилац.
5. Марко има толико дана колико његов отац недеља и толико месеци колико његов деда година. Сва тројица укупно имају 100 година. Колико година има сваки?

VI разред

1. Прва два члана низа су $3\frac{1}{2}$ и $1\frac{1}{4}$, а сваки следећи је два пута мањи од збира претходна два члана. Колика је вредност четвртог члана низа?

$\frac{1}{6}$		
	$\frac{5}{12}$	
	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$

3. Две праве се секу и образују четири угла. Збир унакрсних оштрих углова је за половину правог угла мањи од једног од унакрсних тупих углова. Израчунај та четири угла.

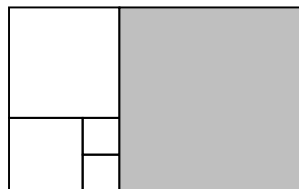
4. На такмичењу је 14 ученика решило све задатке, 32% је решило неке задатке, а 12% ученика није решило ниједан задатак. Колико је ученика учествовало на такмичењу?

5. Дати су скупови $A = \{-3, -2, 1, 3, 5\}$ и $B = \{-1, 0, 1, 2\}$. Упореди број елемената скупова

$$C = \{c \mid c = |a| + |b|, a \in A, b \in B\} \text{ и } D = \{c \mid c = |a + b|, a \in A, b \in B\}.$$

VII разред

1. Правоугаоник је разложен на 5 квадрата као на слици. Који проценат површине правоугаоника заузима површина осенченог квадрата?



2. Између којих узастопних целих бројева се налази број x ако важи

$$2018 : \left(1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \right) = 2019?$$

3. Израчунај вредност израза $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{24} + \sqrt{150}}{\sqrt{12}} \cdot \sqrt{2}$.

4. Реши једначину $\sqrt{(x-2)^2} = x + 5$.

5. Површина конвексног четвороугла $ABCD$ је 20cm^2 . Нека су K, L, M и N редом тачке правих AB, BC, CD и DA такве да су тачке B, C, D и A средишта дужи AK, BL, CM и DN . Израчунај површину четвороугла $KLMN$.

VIII разред

1. Израчунај обим осенчене фигуре на слици, ако су странице правоугаоника дужине 5cm и 14cm.



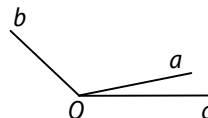
2. Милашин и Радашин купују сулундаре. Милашину недостаје 600 динара за куповину 4 сулундара, а Радашину недостаје 600 динара за куповину 5 сулундара. Ако се удруже, недостајаће им 600 динара за куповину 6 сулундара. Одреди цену сулундара.

- Тачке A , B и C деле кружницу на три лука чије се дужине односе као $3 : 4 : 5$. Одреди унутрашње углове троугла ABC .
- У правоуглом троуглу ABC са катетама $AC = 4\text{cm}$ и $BC = 3\text{cm}$ уписан је квадрат чије две стране леже на катетама, а једно теме на хипотенузи. Израчунај дужине одсецака на које теме квадрата дели хипотенузу.
- Средишта страница правилног шестоугла су темена новог шестоугла. Израчунај однос површина ових многоуглова.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ 07.12.2019. године

III разред

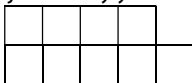
- У понедељак је Зоран решио да од сутра почне да чита књигу. Првог дана прочитао је 32 странице, а сваког следећег дана по три странице више него претходног дана. Колико је укупно страница књиге прочитао након читања у суботу?
 $L \ A \ V$
- Дешифруј одузимање. Различитим словима одговарају различите цифре. Одреди бар једно решење.
$$\begin{array}{r} - \ Z \ E \ C \\ M \ I \ \check{S} \end{array}$$
- Прецртај слику на папир који ћеш предати. Празна поља квадрата попуни различитим непарним бројевима од 3 до 19 (осим броја 11 који је већ уписан) тако да зборови у свим правцима буду једнаки, тј. да се добије магични квадрат.
- Прецртај слику на папир који ћеш предати. Доцртај полуправу Od тако да угао cOd буде прав, а угао bOd оштар. Запиши све углове, па утврди колико међу њима има:
а) оштрих; б) правих; в) тупих углова.
- Запиши све троцифрене природне бројеве којима је збир цифара 10, а највећа цифра им је за 6 већа од најмање.



IV разред

- Колико
а) највише; б) најмање
дана може да буде у 4 узастопна месеца?
- Израчунај збир и разлику највећег и најмањег петоцифреног броја од којих сваки има збир цифара 24.

3. Од 9 квадрата састављена је фигура као на слици чији је обим 28 cm. Одреди збир обима свих квадрата који се могу уочити на слици.



4. Алма и Мира погађају број који је Рале замислио.
 Алма: Замислио си број који је једнак производу бројева 750 и 31.
 Мира: Замислио си број који је једнак производу бројева 640 и 36.
 Ако је Алма погрешила за 250, за колико је погрешила Мира?
5. Одреди све природне бројеве који при дељењу са 7 дају количник једнак остатку.

V разред

1. У запису $AB + ABB + CBBC = BCDC$ замени свако слово цифром (иста слова истом цифром, а различита слова различитим цифрама) тако да сабирање буде тачно.
2. Спајањем два једнака квадрата настала је коцка површине 384 cm^2 . Израчунај површину тог квадрата.
3. Дате су тачке A, B, C, D и E . Нека су тачке A, B и C колинеарне; A, D и E колинеарне и не постоје 4 тачке које су колинеарне. Колико:
 а) правих; б) троуглова
 одређује ових пет тачака?
4. Одреди елементе скупова A, B и C ако је:
 $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A \cap B = \{5, 6, 7\}$,
 $A \setminus C = \{1, 2, 6, 7\}$, $B \setminus (A \cup C) = \{8, 9\}$, $B \cap C = \{3, 5\}$.
5. Разлика два проста броја је једноцифрен број d ($d > 0$). Да ли број d може бити било који једноцифрени број?

VI разред

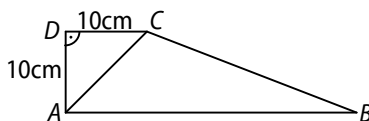
1. Основица AB једнакокраког троугла ABC је 10 cm, а угао на основици је 72° . Ако симетрала угла BAC сече крак BC у тачки D , израчунај дужину изломљене линије $BADC$.
2. За цео број кажемо да је кул ако је за један већи од броја дељивог са 3 (бројеви облика $3k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$). Израчунај збир свих кул бројева између -300 и 300 .
3. Све цифре петоцифреног броја $\overline{abcde}$ ($a \neq 0, e \neq 0$) су међусобно различите. При томе збир цифара једнак је 10. Када се број сабере са бројем написаним

истим цифрама, али у обрнутом поретку добија се број чије су све цифре једнаке. Одреди све такве петоцифрене бројеве.

- Микша је радио 6 тестова из математике од којих се сваки бодује целим бројем поена од 0 до 100. Он је на сваком од првих 5 тестова имао исти број поена, а на шестом је добио више поена него на претходном. Ако је у просеку на тих шест тестова остварио 72 поена, колико поена је Микша могао да освоји на последњем тесту?
- У датом троуглу један унутрашњи угао једнак је неком спољашњем углу тог троугла. У истом троуглу један од преостала два спољашња угла је пет пута већи од неког од преостала два унутрашња угла. Израчунај све унутрашње и спољашње углове тог троугла.

VII разред

- Одреди два узастопна природна броја између којих се налази вредност израза $\sqrt{2019} + \sqrt{5} + \sqrt{10} + \sqrt{17}$.
- Странице троугла ABC су $AB = 14$ cm, $BC = 15$ cm и $CA = 13$ cm.
а) Израчунај површину тог троугла.
б) Нека је S тачка странице AB која је на једнаким растојањима од страница AC и BC . Израчунај растојање тачке S од страница AC и BC .
- Камени угаљ у јами садржи 2% воде, а после неколико дана изван јаме он садржи 6% воде. За колико тона се у том тренутку повећала маса угља, ако је из јаме извађено 1000 t угља?
- На слици је приказан трапез $ABCD$. Ако је површина троугла ACD пет пута мања од површине троугла ABC , одреди обим и површину трапеза $ABCD$.

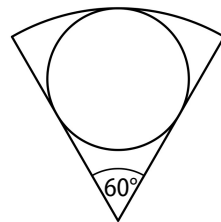


- Одреди најмањи троцифрен природан број n за који је збир цифара његовог збира цифара једнак 9.

VIII разред

- Одреди све природне бројеве n за које важи

$$\frac{n(200 - 19n)}{(n - 2)^2 (n - 4)^{2020}} > 0.$$



2. Израчунај површину круга уписаног у кружни исечак површине $150\pi \text{ cm}^2$ чији је централни угао 60° (види слику).

3. Реши једначину у скупу целих бројева

$$||2x - 4| - 6| + |7 - |1 - y|| = 0.$$

4. За које вредности реалног броја m једначина

$$\frac{3x + 4m}{4} - \frac{3mx}{2} = m - \frac{x - 1}{4}$$

има негативна решења?

5. Колики је најмањи могући збир четири унутрашња угла конвексног седмоугла чији сви углови имају целобројне мере (у степенима)?

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ

07.03.2020. године

IV разред

1. Саша је на папиру написао нулу, а затим редом све природне бројеве од 1 до 2020. Ако је у сваком минути написао тачно 77 цифара, колико му је после сат и по времена писања преостало бројева да напише?
2. Прецртај слику на папир који ћеш предати. Попуни празна поља у магичним квадратима.

2		
9		

„+“

20	12	

„=“

	17	5
		26

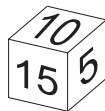
Збир бројева у одговарајућим пољима прва два квадрата треба да буде једнак броју у одговарајућем пољу трећег квадрата.

3. Катарина је за свој нови стан купила фрижидер, телевизор и машину за прање. За све три ове ствари дала је укупно 80 000 динара. Колико кошта сваки од ових уређаја, ако је фрижидер за 8 900 динара скупљи од машине за прање, а телевизор за 6 200 динара јефтинији од фрижидера?

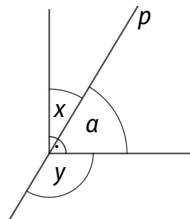
4. Ако једну страницу квадрата повећамо два пута, а другу три пута, добићемо правоугаоник површине 96 cm^2 . За колико је обим добијеног правоугаоника већи од обима полазног квадрата?
5. Лифт у једној двадесетоспратници може да изврши само следеће две наредбе: да се подигне за 8 спратова и да се спусти за 13 спратова. Лифт не може да крене навише ако изнад њега нема бар 8 спратова, нити наниже ако испод њега нема бар 13 спратова. Запиши како се лифтом може:
 - а) спустити са 20. спрата на приземље?
 - б) стићи са 8. на 13. спрат?

V разред

1. Коцка приказана на слици има написан по један природан број на свакој страни. Производи бројева на супротним странама коцке су једнаки. Одреди најмањи могући збир свих шест природних бројева написаних на странама коцке.
2. Одреди све природне бројеве мање од 1000 који се завршавају нулом и једнаки су производу 4 различита проста броја?



3. Права p , која пролази кроз теме правог угла, формира углове као на слици. Ако је збир углова x и y једнак углу од $163^\circ 14'$, одреди меру упоредног углу a .



4. Одреди природан број n тако да важи $\frac{3}{n+1} < \frac{7}{2020} < \frac{3}{n}$.
5. Никола је у тачном примеру сабирања заменио једнаке цифре истим словом, а различите цифре различитим словима и добио ребус:

$$M + A + T + E + M + A + T + I + K + A = \overline{EE}.$$
 Која је највећа цифра коју може заменити слово E ?

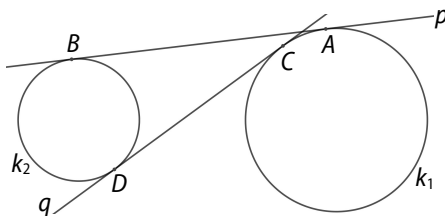
VI разред

1. Одреди бројеве a , b и c ако се зна да је њихов збир већи од броја a за $\frac{5}{2}$, од броја b за $\frac{59}{6}$ и од броја c за $\frac{5}{3}$.
2. Колико има неподударних троуглова са целобројним дужинама страница (у центиметрима) обима 20 cm ? Запиши дужине страница свих тих троуглова.

- Збир двоцифрених бројева $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$ дељив је са 33. Докажи да је и четвороцифрени број $\overline{abcd}$ дељив са 33.
- Колико има седмоцифрених палиндрома чији је производ цифара паран? За број кажемо да је палиндром ако се чита исто и са леве и са десне стране, на пример 2014102.
- Нека је D тачка на основици BC једнакокраког троугла ABC таква да је мера угла BAD једнака 2020 минута и E тачка на краку AC таква да је $AE = AD$. Одреди меру угла CDE .

VII разред

- Да ли постоје природни бројеви x , y и z , такви да је $4^x + 9^y = 11^z$? Образложи одговор.
- Колико има петоцифрених природних бројева у чијем запису се појављује бар једна парна и бар једна непарна цифра?
- Из скупа $\{2, 3, 4, 5\}$ бирају се три различита броја p , q и r . На колико начина се може постићи да број $p^{(q^r)}$ буде дељив са 8?
- Права p додирује кругове k_1 и k_2 у тачкама A и B , а права q у тачкама C и D (види слику). Ако је полупречник круга k_1 једнак 3 cm, а полупречник круга k_2 једнак 2 cm, одреди вредност израза $AB^2 - CD^2$.



- У правоуглом троуглу ABC , са правим углом у темену C , важи $BC = 3AC$. Нека су M и N тачке катете BC такве да је $BM = MN = NC$ и K средиште хипотенузе AB . Израчунај меру угла MKN .

VIII разред

- Мањи дијагонални пресек правилне шестостране пирамиде је једнакостранични троугао обима $18\sqrt{3}$ cm. Израчунај запремину те пирамиде.
- За годину кажемо да је *срећна* ако су све цифре које се користе за записивање броја различите узастопне цифре. На пример, последња *срећна* година је била 2013.

- а) Која је прва следећа срећна година?
б) Колико има срећних година у трећем миленијуму?
3. Израчунај запремину правилне осмостране призме чији је највећи дијагонални пресек квадрат странице 12 cm.
4. Одреди све вредности целог броја m за које је број $\frac{m^2 + 2016}{|m| + 2}$ такође цео.
5. Одреди све просте бројеве p и q за које је број $p^2 + q^2 + 1$ потпун квадрат.

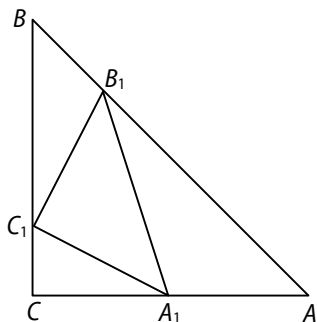
ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ
29.08.2020. године

VI разред

1. Отац има три сина којима даје џепарац. Најстарији син добија трећину укупног износа за џепарац и још 30 динара, средњи трећину остатка и још 30 динара, а најмлађи добија преосталих 430 динара. Колико добијају најстарији и средњи син?
2. У две истоветне кутије налази се укупно 61 куглица. Све куглице обојене су једном од пет различитих боја и нису све исте масе. Постоје куглице две различите масе – лакше и теже. Докажи да постоје бар 4 куглице исте боје и масе у истој кутији.
3. Нека су бројеви $a_1, a_2, \dots, a_n$ сви позитивни и међу собом различити делиоци броја 2020. Израчунај количник збира тих бројева и збира њихових реципрочних вредности:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

4. На страници AB троугла ABC , који није правоугли, дате су тачке M, N, P и Q , тим редом од A према B , такве да праве CM, CN, CP и CQ деле угао ACB на пет једнаких делова. Ако су унутрашњи углови троугла CMN једнаки унутрашњим угловима троугла ABC , одреди углове троугла ABC .
5. Троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ су једнакокрако-правоугли са хипотенузама AB , односно A_1B_1 , при чему тачка A_1 припада дужи AC , тачка B_1 припада дужи AB и тачка C_1 припада дужи BC . Докажи да је $AA_1 = 2CC_1$.



VII разред

1. У правоугаонику $ABCD$ тачка M је средиште дужи AB , а тачка E пресек дијагонале AC и дужи DM . Ако је $AB = \sqrt{2}$ cm и $BC = 1$ cm, докажи да је угао CED прав.
2. Разломак $\frac{100^n + 10^n}{100^n + 4 \cdot 10^n}$, $n \in \mathbb{N}$ сведи на облик $\frac{p}{q}$, где су p и q узајамно прости бројеви.
3. На свакој страни коцке написан је један природан број. Затим је у сваком темену коцке написан производ три броја написана на странама којима је то теме заједничко. Збир осам добијених производа је 175. Одреди збир бројева на странама коцке.
4. Ако је $\frac{1}{a+2019} + \frac{1}{b+2019} + \frac{1}{c+2019} = \frac{3}{2020}$, израчунај вредност израза $\frac{a}{a+2019} + \frac{b}{b+2019} + \frac{c}{c+2019}$.
5. Свака од 13 правих, од којих ниједна није паралелна неком пару страница квадрата, дели квадрат на два четвороугла чије се површине односе као 3 : 5. Докажи да се неке четири од ових 13 правих секу у једној тачки.

VIII разред

1. Одреди последње две цифре броја 7^{7^7} .
2. Нека су x , y , z и $\frac{y+x\sqrt{2}}{z+y\sqrt{2}}$ природни бројеви. Одреди најмању могућу вредност количника $\frac{x+z}{y}$.

3. Дата је тространа пирамида $ABCD$ чије су дужине ивица $AB = 5$ cm, $AC = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $BD = 4$ cm, $AD = 3$ cm, $CD = \frac{12}{5}\sqrt{2}$ cm. Раван, која садржи праву AB и нормална је на CD , сече дуж CD у тачки M . Раван, која садржи праву CD и нормална је на AB , сече дуж AB у тачки N . Израчунај дужину дужи MN .
4. Нека је ABC троугао са тупим углом у темену A и D подножје висине троугла из темена A . Кружница k са центром D , која садржи тачку A , сече праве AB и AC , редом у тачкама M и N . Докажи да је $AB \cdot AM = AC \cdot AN$.
5. Одреди све природне бројеве n за које је могуће неке од бројева из скупа $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ повећати за 1, а све остале смањити за 1, тако да њихов производ остане непромењен.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ

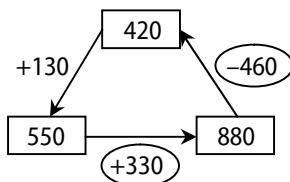
III разред

1. 910, 820, 730, 721, 640, 631, 541, 532.

2. 1, 2, 3, 5, 8, 13, **21, 34, 55**, ...

(Сваки члан низа, почевши од трећег, једнак је збиру претходна два члана.)

3.



4. II, IV, VI, IX, XI, XV, XX, XL, LI, LV, LX, XC.

5. За две године збир година свих ученика се повећао за $70 - 56 = 14$. Како се сваком ученику број година повећао за две, то је број ученика $14 : 2 = 7$.

IV разред

1. а) $278 + 319 - 199 = 398$; б) $230 - 58 - 40 = 132$.

2.

$$\begin{array}{r} 1 \ 2 \ 5 \ 8 \\ + \ 3 \ 8 \ 7 \ 1 \\ \hline 5 \ 1 \ 2 \ 9 \end{array}$$

3. Из збира јединица се добија $\triangle + \square = 10$, а из збира десетица $\square + \bigcirc + 1 = 10$. Како је са $\square$ прекривена цифра стотина, испод квадрата може бити само цифра 1 или 2 (збир три двоцифрена броја је мањи од 300).

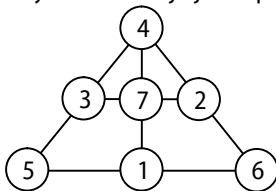
Ако је испод квадрата 2, онда је испод троугла 8, а испод круга 7, међутим ова комбинација бројева не даје решење ($28 + 87 + 72 = 187$, а не 287).

Ако је испод квадрата 1, онда је испод троугла 9, а испод круга 8, па је тражено решење $19 + 98 + 81 = 198$.

4. Цифре свих бројева морају да буду 1, 1, 2 и 7. Има их 12: 7211, 7121, 7112, 2711, 2171, 2117, 1721, 1712, 1271, 1217, 1172 и 1127, а највећи међу њима је број 7211.

5. Збир бројева који се уписују је $1 + 2 + \dots + 7 = 28$, а збир бројева два доња реда је $12 + 12 = 24$. Дакле, у горњем кругу мора бити број 4. На истим правима где је

број 4 збир бројева у преостала два поља мора бити 8. Могуће комбинације су 1 и 7; 2 и 6; 3 и 5. Једно решење дато је на слици, а могућа су и друга попуњавања, зависно од распореда бројева у пољима чији је збир 8.



V разред

1. $A = 42$, $B = 6$, $A : B = 7$, $A \cdot B = 252$.

2. Површина квадрата једнака је $2 \cdot 4 \cdot 4 + 4n \cdot 4 \cdot 4 = 32 + 64n$, а из $32 + 64n = 352$, налазимо да је број коцки 5.

3. То су бројеви 1050 и 9858.

4. Како је $293 - 7 = 286 = 2 \cdot 11 \cdot 13$ и $671 - 8 = 663 = 3 \cdot 13 \cdot 17$, видимо да је заједнички дилац број 13. Заиста, $293 = 13 \cdot 22 + 7$ и $671 = 13 \cdot 51 + 8$.

5. Означимо број Маркових година са x . Тада отац има $7x$, а деда $12x$ година, па из $x + 7x + 12x = 100$ налазимо $20x = 100$, тј. $x = 5$. Дакле, Марко има 5, отац 35, а деда 60 година.

VI разред

1. Трећи члан низа је $\frac{1}{2} \cdot \left(3\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4} \right) = \frac{19}{8} = 2,375$; Вредност четвртог члана низа је

$$\frac{1}{2} \cdot \left(1\frac{1}{4} + \frac{19}{8} \right) = \frac{29}{16} = 1,8125.$$

2.

$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$

3. Ако један од оштрих углова означимо са α , биће $2\alpha + 45^\circ = 180^\circ - \alpha$, односно $3\alpha = 135^\circ$ и $\alpha = 45^\circ$. Дакле, добијају се углови 45° , 135° , 45° и 135° .

4. Из $14 + 0,32x + 0,12x = x$ добијамо $14 = 0,56x$, па је број ученика $x = \frac{14}{0,56} = 25$.

5. Скуп $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ има 7 елемената, а скуп $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ има један елемент више.

VII разред

1. Ако странице квадрата, од највећег до најмањег, обележимо редом са a, b, c и d , биће $a = b + c$, $b = c + d$ и $c = 2d$, па је однос површина освенченог квадрата и правоугаоника

$$\frac{a^2}{a(a+b)} = \frac{a}{a+b} = \frac{b+c}{2b+c} = \frac{2c+d}{3c+2d} = \frac{5d}{8d} = \frac{5}{8} = 0,625.$$

Дакле, површина квадрата је 62,5% површине правоугаоника.

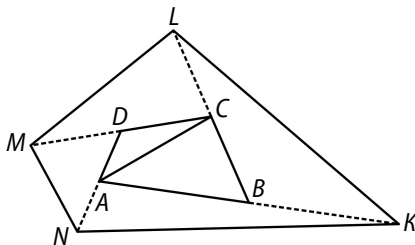
2. Из $1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{2018}{2019} = 1 - \frac{1}{2019}$, добијамо $1 + \frac{1}{x} = -2019$, $\frac{1}{x} = -2020$ и $x = -\frac{1}{2020}$.

Дакле, $-1 \leq x \leq 0$.

3. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{24} + \sqrt{150}}{\sqrt{12}} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6} - 2\sqrt{6} + 5\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 4$.

4. Из $|x - 2| = x + 5$ видимо да за $x \geq 2$ нема решења, а за $x < 2$ добијамо: $2 - x = x + 5$, одакле је $x = -\frac{3}{2}$.

5. $P_{\triangle BKL} = 2P_{\triangle ABC}$ (јер имају једнаке основице $AB = BK$, а висина првог троугла је два пута већа од висине другог). Слично, $P_{\triangle MCL} = 2P_{\triangle BCD}$, $P_{\triangle MDN} = 2P_{\triangle ADC}$ и $P_{\triangle ANK} = 2P_{\triangle ABD}$, па је $P_{\triangle BKL} + P_{\triangle MCL} + P_{\triangle MDN} + P_{\triangle ANK} = 2(P_{\triangle ABC} + P_{\triangle ADC} + P_{\triangle BCD} + P_{\triangle ABD}) = 4P_{ABCD}$, а $P_{NKLM} = 5P_{ABCD} = 100\text{cm}^2$.



VIII разред

1. Граница освенчене фигуре се састоји из две четвртине круга полупречника 5cm и две дужи дужине $14\text{cm} - 5\text{cm} = 9\text{cm}$, па је њен обим једнак

$$2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 5\pi + 2 \cdot 9 = 5\pi + 18 \approx 33,7\text{cm}.$$

2. Милашину и Радашину заједно недостаје 1200 динара за куповину $4 + 5 = 9$ сулундара. С друге стране, недостаје им 600 динара за куповину 6 сулундара. Следи да цена три сулундара износи 600 динара. Дакле, цена једног сулундара је 200 динара.

3. Како је $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 4 : 5$, може се увести ознака $\alpha = 3t$, $\beta = 4t$, $\gamma = 5t$. Из $3t + 4t + 5t = 180^\circ$, добијамо $t = 15^\circ$, па је $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$ и $\gamma = 75^\circ$.

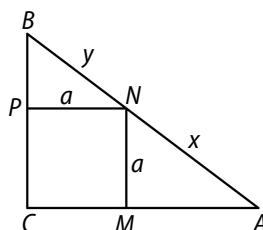
4. Из сличности троугла NMA и BCA , односно VPN и

BCA , налазимо $\frac{x}{a} = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{3}$ и $\frac{y}{a} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{4}$, па је

$x = \frac{5}{3}a$ и $y = \frac{5}{4}a$, а како је $x + y = 5$, биће

$\frac{5}{3}a + \frac{5}{4}a = 5$, одакле се добија $a = \frac{12}{7}$ и $x = \frac{5}{3}a = \frac{20}{7}$,

и $y = \frac{5}{4}a = \frac{15}{7}$.



5. Странаца мањег шестоугла b једнака је половини краће дијагона-ле полазног правилног шестоугла странеце a , тј. $b = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Однос површина већег и мањег

шестоугла је $\left(\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}\right) : \left(\frac{3}{2}b^2\sqrt{3}\right) = \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2}{\frac{3a^2}{4}} = \frac{4}{3}$.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ

III разред

1. Зоран је у уторак прочитао 32 странице, у среду 35 страница, у четвртак 38 страница, у петак 41 страницу, а у суботу 44 странице. Укупно је прочитао $32 + 35 + 38 + 41 + 44 = 190$ страница.

2. У датом одузимању имамо 9 различитих слова, па морамо користити 9 од 10 различитих цифара. Задатак има више решења, а нека решења су:

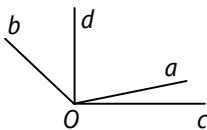
$$\begin{array}{r} 873 \\ -654 \\ \hline 219 \end{array} \quad \begin{array}{r} 890 \\ -314 \\ \hline 576 \end{array} \quad \begin{array}{r} 486 \\ -359 \\ \hline 127 \end{array}$$

3. Како је $3 + 5 + 7 + 9 + 13 + 15 + 17 + 19 = 88$, то збир наспрамних бројева треба да буде 22. Једно решење приказано је на слици.

9	19	5
7	11	15
17	3	13

4. Углови су: cOa , aOd , dOb , cOd , cOb и aOb .

а) 3; б) 1; в) 2.



5. Постоје две могућности одабира цифара чији је збир 10, а разлика највеће и најмање цифре једнака шест: 6, 4, 0 или 7, 2, 1. Од ових цифара могу се саставити 10 бројева: 640, 604, 460, 406, 721, 712, 271, 217, 172, 127.

IV разред

1. а) 123. На пример, јул, август, септембар, октобар;

б) 120. На пример, јануар, фебруар (када година није преступна), март, април.

2. Највећи тражени број је 99600, а најмањи 10599, па је $99600 + 10599 = 110199$ и $99600 - 10599 = 89001$.

3. Обим фигуре чини 14 страница малих квадрата од којих је фигура састављена, па је страница тих квадрата 2 cm. На слици се може уочити 9 малих квадрата од којих је састављена фигура и још 3 квадрата који су састављени од 4 мања квадрата и чија је страница 4 cm. Збир обима 9 малих квадрата је $9 \cdot 4 \cdot 2 \text{ cm} = 72 \text{ cm}$, а збир обима 3 велика квадрата је $3 \cdot 4 \cdot 4 \text{ cm} = 48 \text{ cm}$. Тражени збир обима свих квадрата је $72 \text{ cm} + 48 \text{ cm} = 120 \text{ cm}$.

4. Како је $750 \cdot 31 = 23\,250$ и како је Алма погрешила за 250, Рале је могао да замисли број 23 000 или 23 500. Како је $640 \cdot 36 = 23\,040$, закључујемо да је Мира погрешила или за 40 или за 460.

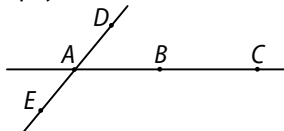
5. Ако количник и остатак означимо са x , онда су тражени бројеви облика $7x + x = 8x$, $1 \leq x \leq 6$, па су то бројеви 8, 16, 24, 32, 40 и 48.

V разред

1. A , B и C не могу бити 0 јер су бар у једном броју цифре највеће месне вредности. Збир цифара јединица је $B + B + C = 10 + C$, одакле је $B = 5$. Дакле, $A5 + A55 + C55C = 5CDC$. На основу сабирања хиљада је $C = 4$, па је $A5 + A55 + 4554 = 54D4$. На основу сабирања десетица (и преноса 1 са месне вредности јединица), важи $D = A + 1$ и постоји пренос 1 на месну вредност стотина, а на основу сабирања стотина добијамо $A = 8$ и $D = 9$. Дакле, $85 + 855 + 4554 = 5494$.

2. Нека је a ивица коцке. Из $6 \cdot a \cdot a = 384$, $a \cdot a = 64$, налазимо $a = 8 \text{ cm}$. Површина квадра је $P = 2 \cdot 8 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm} + 2 \cdot 8 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} + 2 \cdot 8 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} = 256 \text{ cm}^2$.

3. Један могући распоред тачака дат је на слици. У сваком распореду ове тачке одређују: а) 6 прaviх; б) 8 троуглова.



4. Задатак има два решења:

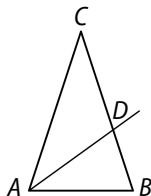
$$A = \{1, 2, 5, 6, 7\}, B = \{3, 5, 6, 7, 8, 9\}, C = \{3, 4, 5\};$$

$$A = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}, B = \{3, 5, 6, 7, 8, 9\}, C = \{3, 4, 5\}.$$

5. d може имати вредности 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 и 9 јер је $1 = 3 - 2$, $2 = 5 - 3$, $3 = 5 - 2$, $4 = 11 - 7$, $5 = 7 - 2$, $6 = 11 - 5$, $8 = 11 - 3$ и $9 = 11 - 2$. d не може имати вредност 7 јер је 7 непаран број и може се добити само као разлика непарног и парног броја. Једини паран прост број је 2 па би онда умањеник морао бити једнак 9, а 9 није прост број.

VI разред

1. Троугао BAD је једнакокрак са угловима од 72° , 72° и 36° , па је $AB = AD$. Троугао ADC је једнакокрак са угловима од 36° , 36° и 108° , па је $DA = DC$. Тражена дужина изломљене линије је $BA + AD + DC = 30\text{cm}$.



2. Сви кул бројеви су облика $3k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) и између -300 и 300 има их укупно 200. Потребно је да израчунамо збир $-299 + (-296) + \dots + 295 + 298$. Ако групишемо први и последњи сабирак, други и претпоследњи, ..., n -ти члан збира са леве стране са n -тим чланом са десне стране, добијамо 100 група сабирака и у свакој је збир -1 . Дакле, тражени збир је -100 .

3. Цифре броја $\overline{abcde}$ су 0, 1, 2, 3, 4. Бројеви $\overline{abcde}$ и $\overline{edcba}$ имају једнаке збирове цифара па њихов збир има збир цифара 20. По услову задатка, све цифре у збиру су једнаке, па је тај збир 44444. Следи да је $c = 2$, а да цифре 0 и 4 не могу бити прва ни последња. Оваквих бројева има 4: 14203, 10243, 30241 и 34201.

4. Означимо са x број освојених поена на сваком од првих 5 тестова, а са y број поена на шестом тесту. Тада је $\frac{5x+y}{6} = 72$ и $y > 72$. Из $5x + y > 432$ налазимо да је $432 - y$ дељиво са 5, тако да постоји 5 могућности: $y \in \{77, 82, 87, 92, 97\}$.

5. Како је спољашњи угао једнак збиру друга два унутрашња, то спољашњи угао може бити једнак унутрашњем углу само код истог темена. Дакле, троугао је правоугли. Нека су унутрашњи углови α , β и γ , а одговарајући спољашњи α_1 , β_1 и

γ_1 . Нека је $\gamma = \gamma_1 = 90^\circ$. Могућности за остале углове су $\alpha_1 = 5\beta$, $\beta_1 = 5\alpha$, $\alpha_1 = 5\alpha$ и $\beta_1 = 5\beta$.

1) $\alpha_1 = 5\beta$. Из $\alpha_1 = \beta + \gamma$, добијамо $\beta = 22^\circ 30'$, $\alpha = 67^\circ 30'$, $\beta_1 = 157^\circ 30'$, $\alpha_1 = 112^\circ 30'$.

2) $\beta_1 = 5\alpha$. Аналогно претходном, добијемо исте величине углова.

3) $\alpha_1 = 5\alpha$. Из $\alpha + \alpha_1 = 180^\circ$, добијамо $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\alpha_1 = 150^\circ$, $\beta_1 = 120^\circ$.

4) $\beta_1 = 5\beta$. Аналогно претходном, добијемо исте величине углова.

Дакле, унутрашњи углови тог троугла су: $22^\circ 30'$, $67^\circ 30'$ и 90° а спољашњи: $157^\circ 30'$, $112^\circ 30'$ и 90° , или унутрашњи: 30° , 60° и 90° а спољашњи: 150° , 120° и 90° .

VII разред

1.

$$\sqrt{2019+2+3+4} < \sqrt{2019+\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{17}} < \sqrt{2019+3+4+5}$$

$$\sqrt{2028} < \sqrt{2019+\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{17}} < \sqrt{2031}$$

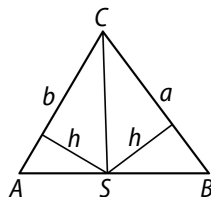
Како је $45 = \sqrt{2025} < \sqrt{2028}$ и $46 = \sqrt{2116} > \sqrt{2031}$ то је вредност израза између бројева 45 и 46.

2. а) Полуобим троугла ABC је 21cm, па се применом Херонове формуле може одредити његова површина. Површина троугла ABC је 84 cm^2 .

б) Означимо са h растојање тачке S од стране AC и BC .

Тада је $84 = P_{ABC} = P_{ASC} + P_{BSC} = \frac{bh}{2} + \frac{ah}{2} = 14h$, одакле је $h =$

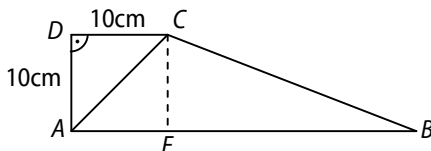
6 cm.



3. Маса угља од 1000 t у јами, без воде, је 980 t. Како је ван јаме проценат воде 6%, то је маса угља ван јаме $1042 \frac{26}{47} \text{ t}$. Дакле, маса угља се повећа за $42 \frac{26}{47} \text{ t}$.

4. Троуглови ACD и ABC имају једнаке висине, па је $AB = 5CD = 50 \text{ cm}$. Сада је $BE = 40 \text{ cm}$, где је E подножје нормале из тачке C на AB , и $CB = \sqrt{40^2 + 10^2} = 10\sqrt{17} \text{ cm}$. Обим трапеза је $O = 50 + 10 + 10 + 10\sqrt{17} = 10 \cdot (7 + \sqrt{17}) \text{ cm}$, а површина

$$P = \frac{10 \text{ cm} + 50 \text{ cm}}{2} \cdot 10 \text{ cm} = 300 \text{ cm}^2.$$

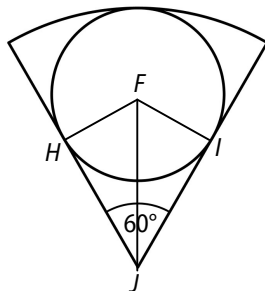


5. Најмањи троцифрени број дељив са 9 је број 108. Збир цифара његовог збира цифара је 9, па је $n = 108$.

VIII разред

1. Да би разломак био дефинисан мора бити $n \neq 2$ и $n \neq 4$. Како је $n > 0$, $(n - 2)^2 > 0$ и $(n - 4)^{2020} > 0$, разломак је позитиван ако је $200 - 19n > 0$, одакле је $n \in \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

2. Површина кружног исечка је шестина површине круга из којег је тај исечак. Следи да је површина тог већег круга $900 \pi \text{ cm}^2$, односно да је полупречник исечка 30 cm. Нека је F центар круга, а H и I додирне тачке круга и полупречника којим је исечак ограничен, а J центар лука који ограничава кружни исечак. Како је троугао FJI са угловима од 30° , 60° и 90° , то је $FJ = 2FI$. Одавде следи да је полупречник уписаног круга трећина полупречника исечка, односно 10 cm, па је површина уписаног круга $100 \pi \text{ cm}^2$.



3. Да би било $||2x - 4| - 6| + |7 - |1 - y|| = 0$ мора бити $||2x - 4| - 6| = 0$ и $|7 - |1 - y|| = 0$, одакле је $|2x - 4| = 6$ и $|1 - y| = 7$. Из прве једначине је $2x - 4 = 6$ или $2x - 4 = -6$, одакле је $x = 5$ или $x = -1$. Из друге једначине је $1 - y = 7$ или $1 - y = -7$, одакле је $y = -6$ или $y = 8$.

4. После сређивања добија се $x(4 - 6m) = 1$, одакле је (за $m \neq \frac{2}{3}$) решење

$$x = \frac{1}{2(2-3m)}. \text{ Да би било } \frac{1}{2(2-3m)} < 0 \text{ потребно је да важи } 2 - 3m < 0, \text{ тј. } m > \frac{2}{3}.$$

5. Збир углова седмоугла је $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_7 = 900^\circ$. Да би збир $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ био минималан, треба да збир преостала три угла $\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7$ буде максималан, а то ће бити испуњено, због услова задатка када је $\alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_7 = 179^\circ$. Дакле, збир $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ је минималан ако је једнак $900^\circ - 3 \cdot 179^\circ = 363^\circ$.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ

IV разред

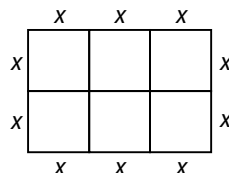
1. Саша је написао $10 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 + 4 \cdot 1021 = 6974$ цифре. После сат и по времен написао је $90 \cdot 77 = 6930$ цифара, односно преостало му је да запише још $6974 - 6930 = 44$ цифре, односно преостало му је да напише још $44 : 4 = 11$ бројева.

2.

2	7	6		6	16	14		8	23	20
9	5	1	„+“	20	12	4	„=“	29	17	5
4	3	8		10	8	18		14	11	26

3. Ако цену машине за прање означимо са x , онда је цена фрижидера $x + 8\,900$, а телевизора $x + 2\,700$. Решавањем једначине или другом пригодном методом добијамо да је $x = 22\,800$, односно да је цена машине за прање 22 800 динара, фрижидера 31 700 динара, а телевизора 25 500 динара.

4. Ако са x означимо страницу квадрата, правоугаоник ће изгледати као на слици, тј. биће састављен од 6 квадрата. Површина једног квадрата биће $96\text{ cm}^2 : 6 = 16\text{ cm}^2$, а његова страница $x = 4\text{ cm}$. Обим квадрата биће $4 \cdot x = 16\text{ cm}$, а правоугаоника $10 \cdot x = 40\text{ cm}$, па је обим правоугаоника за 24 cm већи од обима квадрата.



5. Лифтом се у оба случаја само на један начин може стићи од почетног до жељеног спрата.

а) $20 \rightarrow 7 \rightarrow 15 \rightarrow 2 \rightarrow 10 \rightarrow 18 \rightarrow 5 \rightarrow 13 \rightarrow$ приземље.

б) $8 \rightarrow 16 \rightarrow 3 \rightarrow 11 \rightarrow 19 \rightarrow 6 \rightarrow 14 \rightarrow 1 \rightarrow 9 \rightarrow 17 \rightarrow 4 \rightarrow 12 \rightarrow 20 \rightarrow 7 \rightarrow 15 \rightarrow 2 \rightarrow 10 \rightarrow 18 \rightarrow 5 \rightarrow 13$.

V разред

1. Како је $H3C(5, 10, 15) = 30$, збир ће бити најмањи када се наспрам броја 15 налази 2, наспрам 10 налази 3 и наспрам 5 налази 6. Тражени збир је $10 + 3 + 5 + 6 + 15 + 2 = 41$.

2. Да би се производ 4 проста броја завршавао нулом, неопходно је да су међу њима бројеви 2 и 5. Производ преостала два броја је мањи од 100, па су могућности за преостала два проста броја: 3 и 7; 3 и 11; 3 и 13; 3 и 17; 3 и 19; 3 и 23, 3 и 29, 3 и 31, 7 и 11; 7 и 13. Дакле, тражени бројеви су: 210, 330, 390, 510, 570, 690, 870, 930, 770 и 910.

3. Како је $x = 90^\circ - \alpha$ и $y = 180^\circ - \alpha$, то је $90^\circ - \alpha + 180^\circ - \alpha = 163^\circ 14'$, одакле је $\alpha = 53^\circ 23'$ и $180^\circ - \alpha = 126^\circ 37'$.

4. Из дате релације се добија $\frac{n+1}{3} > \frac{2020}{7} > \frac{n}{3}$, односно $n+1 > \frac{6060}{7} > n$. Како је

$$\frac{6060}{7} = 865\frac{5}{7}, \text{ то је } n = 865.$$

5. Дата једнакост се може написати у облику $2M + 3A + 2T + I + K = 10E$. Цифра E ће бити највећа ако је $A = 9$, $M = 8$ (или 7) и $T = 7$ (или 8). Тада је $I + K$ највише 11, па би збир био највише 68, што повлачи да је $E \leq 6$. Ако је $I = 1$ и $K = 2$, почетни збир је 66, па је највећа цифра коју E може заменити 6.

VI разред

1. Ако саберемо леве и десне стране једнакости

$$a + b + c = a + \frac{5}{2}, \quad a + b + c = b + \frac{59}{6}, \quad a + b + c = c + \frac{5}{3},$$

добивамо да је $2(a + b + c) = 14$, односно $a + b + c = 7$. Заменом добијене вредности у прве три једначине добијамо $a = 4\frac{1}{2}$, $b = -2\frac{5}{6}$, $c = 5\frac{1}{3}$.

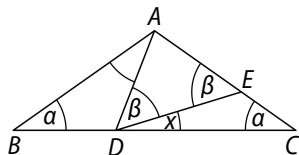
2. Означимо са a , b , c дужине страница троугла, при чему је $a \leq b \leq c$. Бројеви a , b , c морају да задовољавају услов да је сваки мањи од збира друга два, а већи од апсолутне вредности њихове разлике. Водећи рачуна о томе и услову $a + b + c = 20$ добијамо све могућности:

(2, 9, 9), (3, 8, 9), (4, 7, 9), (4, 8, 8), (5, 6, 9), (5, 7, 8), (6, 6, 8), (6, 7, 7).

3. $\overline{abcd} = 100\overline{ab} + \overline{cd} = 99\overline{ab} + (\overline{ab} + \overline{cd})$. Како $33 | (\overline{ab} + \overline{cd})$ и $33 | 99$ то је и број $\overline{abcd}$ дељив са 33.

4. Седмоцифрени палиндроми су облика $\overline{abcdcba}$ па их укупно има колико има различитих бројева облика $\overline{abcd}$, односно 9 000. Да бисмо израчунали колико има палиндрома чији је производ цифара паран, од укупног броја седмоцифрених палиндрома одузећемо број оних чији је производ цифара непаран. Ако је производ цифара непаран све цифре морају бити непарне, а таквих палиндрома има $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$. Дакле, тражени број палиндрома је $9\,000 - 625 = 8\,375$.

5. Троуглови ABC и ADE су једнакокраки па се могу увести ознаке $\angle ABC = \angle ACD = \alpha$, $\angle ADE = \angle AED = \beta$, $\angle CDE = x$. Збир два унутрашња угла једнак је несуседном спољашњем углу, па је $x + \alpha = \beta$ и $\alpha + 2020' = \beta + x$. Заменом вредности за β у другој једначини добијамо да је $x = 1010' = 16^\circ 50'$.



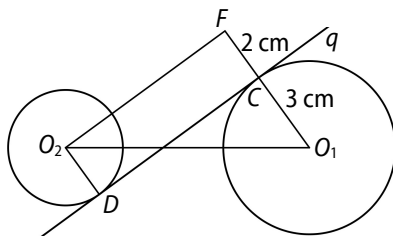
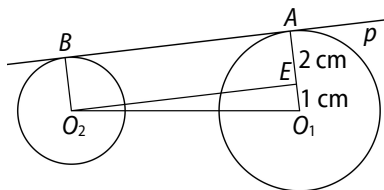
VII разред

1. Бројеви облика 4^x завршавају се цифром 4 или 6, бројеви облика 9^y цифрама 9 или 1, а бројеви облика 11^z цифром 1. Дакле, збир $4^x + 9^y$ може се завршавати неком од цифара 3, 5 или 7 и не може бити једнак 11^z .

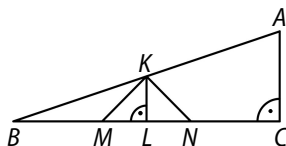
2. Од укупног броја петоцифрених бројева одузећемо оне које у запису имају само парне и само непарне цифре. Укупно има 90 000 петоцифрених бројева. Петоцифрених бројева чије су све цифре парне има $4 \cdot 5^4 = 2\,500$, а чије су све цифре непарне $5^5 = 3\,125$. Бројева у чијем запису је јавља бар једна парна и бар једна непарна цифра има $90\,000 - 2\,500 - 3\,125 = 84\,375$.

3. Да би број $p^{(q)}$ био дељив са 8 неопходно је да буде $p = 2$ или $p = 4$. У оба случаја бројеви q и r се од преостала три броја скупа $\{2, 3, 4, 5\}$ могу изабрати на $2 \cdot 3 = 6$ начина. Дакле, укупан број тражених бројева је $6 + 6 = 12$.

4. У I случају (слика лево) применом Питагорине теореме у троуглу O_2O_1E налазимо $AB^2 = O_2E^2 = O_1O_2^2 - 1^2$. У II случају (слика десно) применом Питагорине теореме у троуглу O_2O_1F налазимо $CD^2 = O_2F^2 = O_1O_2^2 - 5^2$. $AB^2 - CD^2 = 24\text{ cm}^2$.



5. Нека је тачка L средиште дужи BC . Тада је дуж KL средња линија троугла BCA , па је $KL \perp BC$ и $KL = \frac{1}{2}AC = ML = LN$. Дакле, троуглови LMK и LNK су једнакокрако-правоугли, па је $\angle MKL = \angle NKL = 45^\circ$ и $\angle MKN = 90^\circ$.



VIII разред

1. Означимо са a основну ивицу пирамиде. Тада је краћа дијагонала правилног шестоугла $a\sqrt{3} = \frac{1}{3} \cdot 18\sqrt{3}$, одакле је $a = 6\text{ cm}$. Висина пирамиде је $H =$

$$\sqrt{(a\sqrt{3})^2 - a^2} = a\sqrt{2} = 6\sqrt{2}\text{ cm}, \text{ а запремина } V = 108\sqrt{6}\text{ cm}^3.$$

2. а) 2031;

б) У запису срећне године трећег миленијума могући су следећи избори цифара: 0, 1, 2, 3; 1, 2, 3, 4 или 2, 3, 4, 5. При томе је цифра 2 увек на првом месту. За сваки избор постоји 6 могућности за редослед друге, треће и четврте цифре. Дакле, тражени број је $3 \cdot 6 = 18$.

3. Висина призме и најдужа дијагонала основе су 12 cm. Правилни осмоугао се састоји од четири подударна делтоида чије су дијаголане 6 cm и $6\sqrt{2}$ cm, па је површина основе $B = 72\sqrt{2}$ cm², а запремина призме је $V = 864\sqrt{2}$ cm³.

4. $\frac{m^2 + 2016}{|m| + 2} = \frac{m^2 - 4 + 2020}{|m| + 2} = |m| - 2 + \frac{2020}{|m| + 2}$. Полазни број је цео ако $(|m| + 2) |2020$. Како је $2020 = 1 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot 101$, његови делиоци су 1, 2, 4, 5, 10, 20, 101, 202, 404, 505, 1010 и 2020 (има их 12). $|m| + 2$ не може бити једнако 1. Ако је $|m| + 2 = 2$ мора бити $m = 0$, а у свим осталим случајевима постоје по две могућности за m . Дакле, оваквих бројева m има 21 и они су: 0, 2, -2, 3, -3, 8, -8, 18, -18, 99, -99, 200, -200, 402, -402, 503, -503, 1008, -1008, 2018, -2018.

5. Нека је најпре $p = 2$. Тада треба да важи $5 + q^2 = n^2$, тј. $n^2 - q^2 = (n - q)(n + q) = 5$, одакле је $n + q = 5$ и $n - q = 1$, тј. $q = 2$ ($n = 3$). Претпоставимо сада да важи $p > 2$ и $q > 2$. За квадрат непарног броја важи $(2k + 1)^2 = 4k(k + 1) + 1$, па је остатак при дељењу са 4 непарног броја једнак 1. У релацији $p^2 + q^2 + 1 = n^2$ сви бројеви $p, q, 1$ и n су непарни, па је остатак при дељењу са 4 леве стране једнакости 3, а десне 1, што је немогуће. Дакле, једино решење задатка је $p = q = 2$.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ

VI разред

1. Нека је S укупна сума коју три сина добијају за џепарац. Тада, први син добија $x = \frac{1}{3}S + 30$ динара, средњи син добија $y = \frac{1}{3}(S - x) + 30 = \frac{2}{9}S + 20$ динара, а најмлађи син добија $z = 430$ динара. Из $x + y + z = S$, следи да је $\frac{4}{9}S = 480$, односно $S = 1080$ динара, па најстарији син добија 390 динара, а средњи 260 динара.

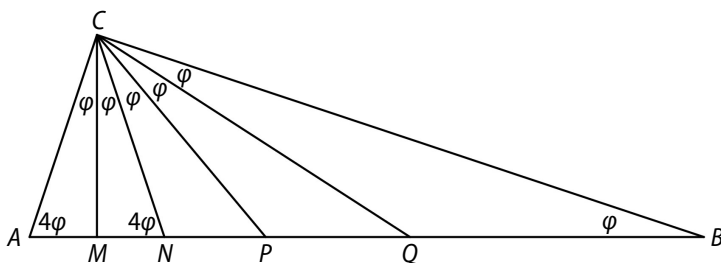
2. По Дирихлеовом принципу у једној од кутија је бар 31 куглица. Како су оне обојене са 5 различитих боја, међу њима је бар 7 куглица исте боје. Како се појављују у две различите масе, међу тих 7 постоје бар 4 куглице које су и исте масе.

3. Ако је a_i дилац броја 2020, онда је $a_i = \frac{2020}{a_p}$ где је a_p такође дилац броја

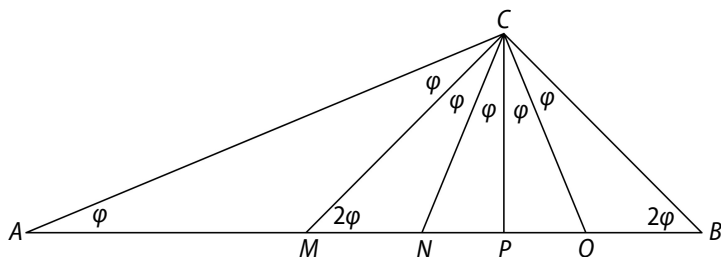
2020. Сваки од бројева $a_1, a_2, \dots, a_n$ можемо заменити тачно једним од разломака $\frac{2020}{a_1}, \frac{2020}{a_2}, \dots, \frac{2020}{a_n}$, па важи:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} = \frac{\frac{2020}{a_1} + \frac{2020}{a_2} + \dots + \frac{2020}{a_n}}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} = \frac{2020 \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} = 2020.$$

4. 1°) Нека да је $\angle ABC = \angle MCN = \varphi$. Тада је $\angle MNC$ (спољашњи угао троугла NBC) = $\angle BAC = 4\varphi$. Одавде је $10\varphi = 180^\circ$, тј. $\varphi = 18^\circ$, одавде је $\angle ACB = 5\varphi = 90^\circ$, што је супротно претпоставци да троугао ABC није правоугли. Дакле, у овом случају нема решења.

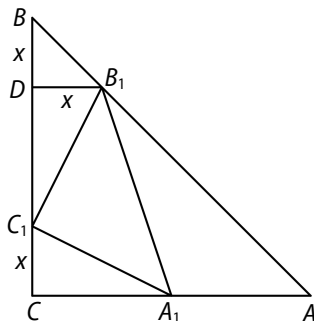


2°) Нека да је $\angle BAC = \angle MCN = \varphi$. Тада је $\angle CMN$ (спољашњи угао троугла ACM) = $\angle ABC = 2\varphi$. Одавде је $8\varphi = 180^\circ$, тј. $\varphi = 22^\circ 30'$, одавде је $\angle ACB = 5\varphi = 112^\circ 30'$, $\angle CAB = \varphi = 22^\circ 30'$, $\angle CBA = 2\varphi = 45^\circ$.



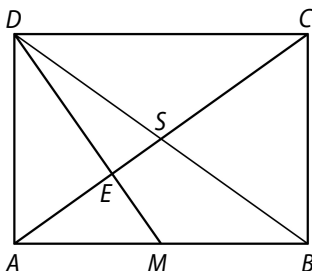
5. Нека је D подножје нормале из тачке B_1 на BC и нека је $CC_1 = x$. Троуглови CA_1C_1 и DC_1B_1 су подударни правоугли троуглови (УСУ), па је $DB_1 = CC_1 = x$ и $CA_1 = DC_1$. Како је троугао DB_1B једнакокрако-правоугли, то је $DB = DB_1 = x$. Сада имамо:

$AA_1 = AC - CA_1 = BC - DC_1 = DB + CC_1 = 2x$.
Дакле, закључујемо да је $AA_1 = 2CC_1$.



VII разред

1. Применом Питагорине теореме имамо да је $AC = \sqrt{3}$ cm, $DM = \frac{\sqrt{6}}{2}$ cm. Ако са S означимо пресек дијагонала, тада су DM и AS тежишне дужи троугла ABD , па важи да је $DE = \frac{2}{3}DM = \frac{\sqrt{6}}{3}$ cm, $AE = \frac{2}{3}AS = \frac{1}{3}AC = \frac{\sqrt{3}}{3}$ cm. Како важи да је $AD^2 = AE^2 + ED^2$, закључујемо да је $\angle AED = \angle CED = 90^\circ$.



2. $\frac{100^n + 10^n}{100^n + 4 \cdot 10^n} = \frac{10^n \cdot (10^n + 1)}{10^n \cdot (10^n + 4)} = \frac{10^n + 1}{10^n + 4}$. Ако $d \mid 10^n + 1$ и $d \mid 10^n + 4$, тада важи да $d \mid 10^n + 4 - (10^n + 1)$, тј. $d \mid 3$, па је $d = 1$ или $d = 3$. Бројеви $10^n + 1$ и $10^n + 4$ никада нису дељиви са 3 (збир цифара им је 2 и 5), па је $p = 10^n + 1$ и $q = 10^n + 4$.

3. Нека су a, b, c, d, e, f бројеви написани на странама коцке, тако да су a и b бројеви на супротним странама, као и c и d . Тада су у теменима коцке написани бројеви $ace, acf, ade, adf, bce, bcf, bde, bdf$. Како је

$$ace + acf + ade + adf + bce + bcf + bde + bdf = (a + b)(c + d)(e + f) = 175,$$

и како је $175 = 5 \cdot 5 \cdot 7$ једини начин да се 175 напише у облику производа три броја већа од 1, следи да је

$$a + b + c + d + e + f = (a + b) + (c + d) + (e + f) = 5 + 5 + 7 = 17.$$

4. Важи да је:

$$\frac{a+2019}{a+2019} + \frac{b+2019}{b+2019} + \frac{c+2019}{c+2019} = 3,$$

$$\frac{a}{a+2019} + \frac{b}{b+2019} + \frac{c}{c+2019} = 3 - \frac{2019}{a+2019} - \frac{2019}{b+2019} - \frac{2019}{c+2019},$$

$$\frac{a}{a+2019} + \frac{b}{b+2019} + \frac{c}{c+2019} = 3 - 2019 \cdot \left(\frac{1}{a+2019} + \frac{1}{b+2019} + \frac{1}{c+2019} \right),$$

$$\frac{a}{a+2019} + \frac{b}{b+2019} + \frac{c}{c+2019} = 3 - 2019 \cdot \frac{3}{2020},$$

$$\frac{a}{a+2019} + \frac{b}{b+2019} + \frac{c}{c+2019} = \frac{3 \cdot (2020 - 2019)}{2020} = \frac{3}{2020}.$$

5. Свака од 13 датих правих дели квадрат на два трапеза. Сваки од та два трапеза има висину једнаку страници квадрата. Како се површине тих трапеза односе као 3 : 5, то се и дужине средњих линија односе као 3 : 5. Дакле, свака од 13 правих мора да пролази кроз неку од тачака које средњу линију квадрата деле у односу 3 : 5. Квадрат има 2 средње линије, па постоје 4 тачке које их деле у односу 3 : 5. Како је број правих 13, то на основу Дирихлеовог принципа бар четири од датих правих садрже исту тачку.

VIII разред

1. Како је $7^4 = 2401 \equiv 1 \pmod{100}$ и како је $7^7 \equiv (-1)^7 \pmod{4} \equiv 3 \pmod{4}$, то је

$$7^{7^7} = 7^{4k+3} \equiv 7^3 \pmod{100} \equiv 43 \pmod{100}.$$

2. Из услова задатка следи да је $\frac{y+x\sqrt{2}}{z+y\sqrt{2}} = k$, $k \in \mathbb{N}$. Даље је $x\sqrt{2} + y = ky\sqrt{2} + kz$,

тј. $\sqrt{2}(x - ky) = zk - y$ одакле мора бити $x - ky = 0$ и $zk - y = 0$. Сада је $\frac{x}{y} = \frac{y}{z}$,

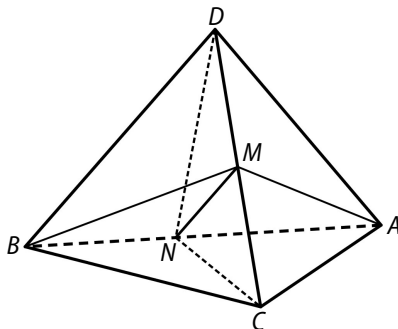
одакле је $y^2 = xz$, тј. $y = \sqrt{xz}$. Даље је

$$\frac{x+z}{y} = \frac{x}{\sqrt{xz}} + \frac{z}{\sqrt{xz}} = \sqrt{\frac{x}{z}} + \sqrt{\frac{z}{x}} \geq 2\sqrt{\frac{x}{z} \cdot \frac{z}{x}} = 2.$$

Дакле, најмања вредност количника је 2 и достиже се за $x = y = z = 1$.

3. Троуглови ABC и ABD су правоугли (странице дужине 3cm, 4cm, 5cm) са хипотенузом AB . Троуглови BCD и ACD су једнакокраки са основицом CD . Раван која садржи праву AB и нормална је на CD сече ову дуж у њеном средишту (AM и BM су нормале једнакокраких троуглова из темена при врху). Тачка N је заједничко подножје висина из темена C и D на AB у троугловима ABC и ABD . Како су висине CN и DN једнаке (висине из темена правих углова подударних троуглова), MN је висина једнакокраког троугла CDN . Како је $CN = DN = \frac{12}{5}$ cm, то

$$\text{је } MN = \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 - \left(\frac{12}{10}\sqrt{2}\right)^2} \text{ cm} = \frac{6}{5}\sqrt{2} \text{ cm}.$$



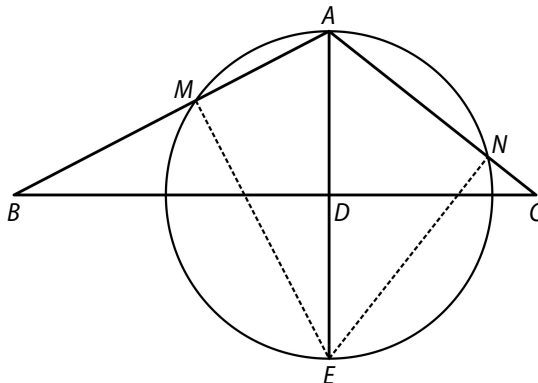
4. Нека је E друга тачка пресека праве AD са кружницом (AE је пречник кружнице). Правоугли троуглови ABD и AEM су слични (заједнички оштар угао у темену A), па је $\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AM}$, тј.

$$AB \cdot AM = AD \cdot AE. \quad (1)$$

На исти начин, из сличности правоуглих троуглова ACD и AEN , добијамо да је

$$AC \cdot AN = AD \cdot AE. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следи да је $AB \cdot AM = AC \cdot AN$.



5. Лако се види да је то могуће за све парне природне бројеве. Ако поделимо бројеве на парове узастопних природних бројева $(1, 2), (3, 4), \dots$ и мањи увећамо за 1, а већи умањимо за 1, производ се неће променити.

За $n = 3$ није могуће ни на који начин добити комбинацију бројева чији је производ 6.

Показаћемо да је ово могуће за сваки непаран број већи од 3.

За $n = 5$ бројеве 1, 2, 3, 4, 5 променићемо на следећи начин: $1+1, 2-1, 3-1, 4+1, 5+1$, чиме добијамо бројеве 2, 1, 2, 5, 6 чији је производ такође 120.

За било који други непаран природан број, првих пет бројева променићемо као у случају $n = 5$, а преосталих $n - 5$ бројева поделићемо на парове узастопних природних бројева код којих ћемо мањи увећати за 1, а већи умањити за 1, чиме добијамо производ једнак производу првих n узастопних бројева.

ИЗВОД ИЗ ПРАВИЛНИКА
о такмичењима ученика основних и средњих школа из математике и
информатике у организацији Министарства просвете, науке и
технолошког развоја Републике Србије и Друштва математичара Србије

1. УЧЕСНИЦИ ТАКМИЧЕЊА

Такмичења из математике организују се за ученике основних школа од III до VIII разреда основне школе. Сваки ученик има право да учествује на овим такмичењима. Такмичења се спроводе у пет ступњева: I ступањ – школско такмичење; II ступањ – општинско такмичење; III ступањ – окружно такмичење; IV ступањ – државно такмичење; V ступањ – Српска математичка олимпијада (СМО). Да би ученик учествовао на вишем ступњу такмичења, потребно је да учествује на претходним ступњевима такмичења. Сва такмичења истог ступња почињу у исто време. Ученици се такмиче у оквиру свог разреда. Изузетно, ученик се у току школске године може такмичити у вишем разреду, под условом да је у претходној школској години у свом узрасту остварио прву награду на општинском такмичењу (за ученике 3. разреда), окружном такмичењу (за ученике 4. и 5. разреда), односно државном такмичењу (за ученике осталих разреда). Ученик седмог или осмог разреда основне школе који је у претходној години учествовао и освојио 1, 2. или 3. награду, у текућој школској години стиче право учешћа на одговарајућем такмичењу које је за један ступањ ниже од највишег на коме је учествовао у претходној години и освојио награду. Ученик на којег се односи ово правило мора да учествује на свим нижим нивоима такмичења у текућој години.

2. ОРГАНИЗАЦИЈА ТАКМИЧЕЊА

Школска и општинска такмичења се организују за ученике од III до VIII разреда. Окружна такмичења се организују за ученике од IV до VIII разреда. Државно такмичење се организује за ученике од VI до VIII разреда. Српска математичка олимпијада се организује за ученике VII и VIII разреда. На сваком такмичењу закључно са државним ученици самостално решавају по 4-5 задатака. Израда задатака траје 120 минута на школском и општинском такмичењу, 150 минута на окружном, 180 минута на државном такмичењу. На СМО се раде 4 задатка у трајању од 240 минута. Задаци на свим ступњевима такмичења осим СМО бодују се са по 20 поена, тако да је укупан збир поена 100. О бодовању задатака на СМО одлуку доноси Такмичарска комисија.

При изради задатака дозвољена је једино употреба прибора за писање и цртање. Ученик који не решава задатке самостално, користи недозвољени прибор или на други начин не поштује пропозиције, удаљује се са такмичења.

На свим такмичењима (сем школског) ученици раде задатке под шифром. Дешифровање радова на такмичењима IV и V ступња врши се тек након решавања приговора и одлуке такмичарске комисије о додели награда и

пласману ученика за наредни ранг такмичења. На такмичењима IV и V ступња (а по потреби и нижим ступњевима такмичења) ученици раде на дуплим копијним папирима. Оригинали остају комисији и трајно су власништво Друштва математичара Србије, а копије задржавају ученици.

3. ОРГАНИЗАТОРИ ТАКМИЧЕЊА

Организатори такмичења су министарство задужено за просвету Републике Србије (МПРС) и Друштво математичара Србије (ДМС). Организатори такмичења на почетку сваке школске године доносе календар такмичења за све ступњеве такмичења. Уз информацију о календару такмичења, ДМС одређује списак тема за сваки ступањ такмичења и истиче га на сајту ДМС.

Школска такмичења организују школски активни наставника математике. Задатке за ова такмичења могу да састављају и активни наставника школа. Општинска и окружна такмичења организују подручне јединице МПРС и одговарајуће подружнице ДМС. У организацији општинских и окружних такмичења организаторима такмичења непосредно помажу општинске, односно окружне комисије за преглед и оцену задатака (у даљем тексту такмичарске комисије). Ове комисије именују извршни одбори подружница ДМС које су регистроване на одговарајућем подручју. Такмичарска комисија објављује резултате прегледа радова одмах по завршеном прегледу, и то на такмичењима IV и V ступња под шифрама. Сваки такмичар има право да у прописаном року уложи писани приговор на резултате прегледа. Такмичарска комисија формира поткомисију за приговоре. Поткомисији за приговоре достављају се детаљна бодовања сваког задатка. Приликом разматрања приговора, сваки задатак прегледају најмање два члана комисије за приговоре. Одлука комисије за приговоре је коначна, сем у случају окружног такмичења ученика VI, VII и VIII разреда.

У организацији и спровођењу такмичења учествује Државна комисија за такмичења из математике ученика основних школа. Чланове Државне комисије именује Извршни одбор ДМС из редова истакнутих наставника основних школа, наставника средњих школа, наставника и сарадника универзитета и института и других чланова ДМС који су афирмисани у раду са обдареним ученицима. Државна комисија припрема задатке за све ступњеве такмичења, као и распоред поена у оквиру сваког задатка („кључ“), одређује списак тема за сваки ступањ такмичења, непосредно учествује у организацији и спровођењу државних такмичења и српских олимпијада.

Непосредни организатор такмичења дужан је да организаторима наредног ступња такмичења одмах по завршетку такмичења достави резултате такмичења у електронском и писаном облику са списком свих учесника такмичења и другим релевантним подацима (презиме и име, разред, школа, број поена по задацима и збирно и име наставника). Такође је дужан да на огласној табли школе домаћина и сајту одговарајуће подружнице математичара или сајту ДМС објави прелиминарне, а потом и коначне резултате такмичења. Организатори окружних такмичења дужни су да најкасније 4 дана после одржавања такмичења

доставе Државној комисији списак свих ученика окружног такмичења из VI, VII и VIII разреда који су освојили 40 или више поена и који су рангирани у опадајућем поретку, и то у електронском и писаном облику, као и радове тих такмичара. Списак треба да садржи све потребне податке о такмичарима. Државна комисија има право да достављене радове поново прегледа и да, у циљу уједначавања критеријума, изврши ревизију додељених бодова.

На резултате окружног такмичења VI, VII и VIII разреда могуће је уложити приговор Државној комисији у року од 5 дана од одржавања окружног такмичења. Писани и образложени приговор који садржи на које елементе рада ученика се он односи, може да уложи искључиво ученикова школа, а приговор потписује предметни наставник ученика. Државна комисија утврђује коначне резултате, као и списак учесника Државног такмичења, најкасније 10 дана од одржавања окружног такмичења и објављује га на сајту ДМС.

Такмичарска комисија одлучује о броју ученика који су освојили 1, 2 и 3. награду, као и похвалу на одговарајућем такмичењу. Награде на II и III ступњу такмичења обезбеђују подружнице ДМС, а на Државном такмичењу ДМС и МПРС. Укупан број награда и похвала је по правилу око половине броја учесника по сваком разреду, при чему се око 5% ученика сваког разреда награђује првом наградом, око 10% ученика сваког разреда награђује другом наградом, око 15% ученика сваког разреда награђује трећом наградом. Око 20% ученика сваког разреда се похваљује. Притом, у случају II и III ступња такмичења, сваки ученик који освоји 90 или више поена награђује се првом наградом, сваки ученик који освоји 80 или више поена награђује се најмање другом наградом, сваки ученик који освоји 70 или више поена награђује се најмање трећом наградом, сваки ученик који освоји 60 или више поена се похваљује. У случају II и III ступња такмичења за ученике VII и VIII разреда, наведени проценти се користе за формирање листе награђених у одељењима основне школе са 4 часа математике недељно, при чему у том рангирању не учествују ученици који раде по програмима специјализованих одељења математичких гимназија. Ученици који раде по програмима специјализованих одељења математичких гимназија награђују се по критеријумима који су добијени применом првог дела овог става.

4. БРОЈ УЧЕСНИКА ТАКМИЧЕЊА

Непосредни организатори школских, општинских и окружних такмичења одређују број ученика по разредима за одговарајући ступањ такмичења, у складу са просторним и другим организационим могућностима. На Државном такмичењу учествује око 300 најуспешнијих ученика VI, VII и VIII разреда (око 100 ученика по сваком разреду). На СМО за ученике основних школа учествује 20 најбоље пласираних ученика на државном такмичењу и то 6 ученика седмог разреда и 14 ученика осмог разреда. Уколико на државном такмичењу за ученике основних школа дође до деобе одговарајућег места, за СМО се квалификују сви ученици који деле та места. На СМО за ученике основних школа учествују и сви ученици који су се пласирали међу првих 20 на државном

такмичењу ученика средњих школа (А категорија), а испуњавају старосни услов (мање од 15,5 година на дан одржавања ЈБМО), као и ученици који су претходне године учествовали на ЈБМО и нису укључени у претходно, а задовољавају старосни услов, под условом да су учествовали на Државном такмичењу.

5. ЗАДАЦИ СА ТАКМИЧЕЊА

Задатке за све ступњеве свих такмичења састављају одговарајуће Државне комисије. Задаци за прва три ступња се достављају непосредним организаторима такмичења поштом преко одговарајуће подручне јединице МПС. Заједно са задацима, у посебним ковертама, достављају се решења задатака. У кључу за решења задатака Државна комисија даје и начин расподеле бодова у оквиру сваког задатка. После сваког ступња такмичења на сајту ДМС истичу се задаци. На сајту се објављују и спискови учесника Државног такмичења и Српске олимпијаде. Задатке и решења свих такмичења једног циклуса закључно са државним ДМС штампа у посебној публикацији.

**СПИСАК УЧЕСНИКА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА
ИЗ МАТЕМАТИКЕ ШКОЛСКЕ 2019/20. ГОДИНЕ**

VI РАЗРЕД

Име и презиме	Школа	Место
Алекса Арсић	Светозар Милетић	Земун
Ана Јањић	Вук Караџић	Врање
Анастасија Шоршокановић	Десанка Максимовић	Зајечар
Андреј Васиљевић	Мома Станојловић	Крагујевац
Андреј Дробњаковић	Краљ Александар I	Нови Београд
Андреј Пешић	Павле Савић	Београд
Анђела Гордић	Гојко Друловић	Радоиња
Анђела Несторовић	Ђорђе Крстић	Београд
Богдан Ђокић	Јован Поповић	Крагујевац
Вељко Иђушки	Аврам Мразовић	Сомбор
Вељко Станковић	Светозар Марковић	Лесковац
Владимир Ђурица	Владислав Рибникар	Београд
Владимир Лукић	Стеван Дукић	Београд
Владимир Цвејин	Никола Вукићевић	Сомбор
Влатко Ђукић	Стеван Чоловић	Ариље
Вук Ковачевић	Филип Кљајић Фића	Београд
Вук Ристић	Душко Радовић	Нови Београд
Вукашин Пешић	Карађорђе	Велика Плана
Григорије Максимовић	Мирко Јовановић	Крагујевац
Дамјан Граовац	Деспот Стефан Лазаревић	Београд
Данило Гавриловић	Васа Пелагић	Лесковац
Данило Ђукић	Јован Поповић	Крушевац
Данило Миленаковић	Михајло Пупин	Земун
Дарко Стаменковић	Душан Радовић	Ниш
Дени Костић	8. септембар	Пирот
Димитрије Јелић	Јован Дучић	Нови Београд
Ђорђе Лужњанин	Др Арчибалд Рајс	Београд
Елена Бјелетић	Јосиф Костић	Лесковац
Емилија Павловић	Ратко Вукићевић	Ниш
Ива Живковић	Јован Миодраговић	Београд

Име и презиме	Школа	Место
Ива Јандрлић	Влада Аксентијевић	Београд
Ива Крга	Радоје Домановић	Нови Београд
Ивана Бићанин	Стојан Новаковић	Блаце
Ивона Ачковић	Душан Радовић	Ниш
Јана Јовановић	Миле Дубљевић	Лајковац
Јана Стојиљковић	Светозар Марковић	Лесковац
Јања Спасенић	8. септембар	Пирот
Јелена Турановић	Вук Караџић	Кладово
Јован Кулезић	Анта Богићевић	Лозница
Јован Сузић	Братство јединство	Сомбор
Калина Павловић	Јосиф Панчић	Београд
Корина Глушац	Светозар Милетић	Врбас
Лазар Јешић	Драган Лукић	Нови Београд
Леа Петровић	Бранко Радичевић	Панчево
Лена Станковић	21. октобар	Крагујевац
Лена Станојевић	Љубица Радосављевић Нада	Зајечар
Ленка Мијаиловић	Николај Велимировић	Шабац
Лидија Букуров	Светозар Марковић Тоза	Нови Сад
Лука Дељхуса	Радоје Домановић	Крагујевац
Марко Бранковић	Свети Сава	Ниш
Марко Пепелчевић	Добросав Радосављевић Народ	Мачванска Митровица
Мартин Плетикосић	Брат-Јединство	Бајша
Матеја Јовановић	Учитељ Таса	Ниш
Матеја Нешић	Андреа Савчић	Ваљево
Матеја Симић	Доситеј Обрадовић	Клупци
Матија Ранчић	8. септембар	Пирот
Маша Јовановић	Димитрије Туцовић	Краљево
Мила Шушић	Вук Караџић	Београд
Милан Икодиновић	Бановић Страхиња	Београд
Милан Јешић	Драгомир Марковић	Крушевац
Милена Пантић	Дринка Павловић	Београд
Милица Ничић	Вук Караџић	Врање
Милица Пешић	8. септембар	Пирот

Име и презиме	Школа	Место
Милица Чучковић	Мирослав Мика Антић	Панчево
Милош Мандић	Бранко Радичевић	Нови Београд
Миона Бранковић	Вук Караџић	Пирот
Михаило Јанковић	Јанко Веселиновић	Шабац
Михајло Алексић	Борислав Пекић	Нови Београд
Михајло Бикар	Јован Грчић Миленко	Беоцин
Михајло Стошовић	Ратко Вукићевић	Ниш
Нађа Петровић	Драган Лукић	Нови Београд
Нађа Томашевић	Борислав Пекић	Нови Београд
Немања Васић	Иво Андрић	Ниш
Немања Хаџиђикић	Раде Драинац	Београд
Ненад Миловановић	Јован Цвијић	Дебrc
Никита Ивановић	Ратко Митровић	Нови Београд
Никола Манојловић	Вук Караџић	Београд
Никола Радовановић	Доситеј Обрадовић	Пожаревац
Никола Ранисављевић	Михајло Пупин	Земун
Никола Ристић	Вук Караџић	Сурдулица
Огњен Нишкић	Лаза Костић	Нови Београд
Олга Тошев	Кнегиња Милица	Нови Београд
Павле Ђурић	Иван Горан Ковачић	Београд
Павле Маркуш	Дринка Павловић	Београд
Павле Михајловић	Љупче Николић	Алексинац
Павле Томашевић	Краљ Петар Први	Београд
Петар Поповић	Николај Велимировић	Шабац
Петра Костић	8. септембар	Пирот
Растко Илић	Горан Остојић	Јагодина
Родољуб Зељковић	Вук Караџић	Црвенка
Сава Стојаковић	Милован Глишић	Ваљево
Сара Живковић	8. октобар	Власотинце
Сергеј Ирт	Светозар Милетић	Земун
Слободан Јањић	Франце Прешерн	Београд
Стефан Богосављевић	Вук Караџић	Неготин
Стефан Шебез	Јован Поповић	Нови Сад

Име и презиме	Школа	Место
Страхиња Југовић	Радоје Домановић	Нови Београд
Тамара Стошић	Душко Радовић	Нови Београд
Теодор Јанковић	Вук Караџић	Београд
Теодора Божићевић	Соња Маринковић	Суботица
Теодора Петровић	Михајло Пупин	Земун
Урош Јаковљевић	Жарко Зрењанин	Нови Сад
Филип Шумић	Радоје Домановић	Нови Београд

VII РАЗРЕД

Име и презиме	Школа	Место
Алекса Вешковац	Математичка гимназија	Београд
Александар Госпавић	Вук Караџић	Чачак
Александра Ковачевић	Стеван Чоловић	Ариље
Александра Станојковић	Бранко Радичевић	Панчево
Ана Илић	Гимназија Светозар Марковић	Ниш
Андреј Недељковић	Гимназија Светозар Марковић	Ниш
Андреј Петровић	Математичка гимназија	Београд
Ања Вукмировић	Гаврило Принцип	Земун
Вања Крстајић	Раде Драинац	Београд
Вања Илић	Драгомир Марковић	Крушевац
Василије Рончевић	Светолик Ранковић	Аранђеловац
Васил Поповић	Братство јединство	Врбас
Вељко Младеновић	Танаско Рајић	Чачак
Видак Глигоријевић	Краљ Александар I	Пожаревац
Видан Цивкароски	Математичка гимназија	Београд
Владимир Бранковић	Математичка гимназија	Београд
Војин Митровић	Математичка гимназија	Београд
Војислав Андрић	Математичка гимназија	Београд
Данило Грујић	Вук Караџић	Крушевац
Данило Јовановић	Радоје Домановић	Врање
Димитрије Милошевић	Сретен Младеновић Мика	Ниш
Дуња Дубока	Војислав Вока Савић	Лазаревац
Дуња Стојановић	Анта Богићевић	Лозница

Име и презиме	Школа	Место
Душан Радисављевић	Јован Поповић	Крушевац
Душан Стојковић	Вук Караџић	Лесковац
Ђорђе Јовановић	Сестре Илић	Ваљево
Ђорђе Пауновић	Карађорђе	Београд
Ђорђе Џонић	8. септембар	Пирот
Ђурђија Петровић	Аца Алексић	Александровац
Ења Вуковић	Змај Јова Јовановић	Београд
Иван Биреш	Гимназија Јован Јовановић Змај	Нови Сад
Ивана Остојић	Мика Митровић	Богатић
Ирена Марковић	Ратко Митровић	Нови Београд
Исидора Влајковић	Светозар Марковић	Београд
Јана Милановић	Душан Јерковић	Ужице
Јанко Јаковљевић	Милинко Кушић	Ивањица
Јанко Поповић	Математичка гимназија	Београд
Јован Траиловић	Уједињене нације	Београд
Јована Денић	Мирослав Антић	Ниш
Јована Медић	Јован Микић	Суботица
Катарина Недић	Гимназија Јован Јовановић Змај	Нови Сад
Ксенија Живанић	Прва крагујевачка гимназија	Крагујевац
Лена Ерић	Прва крагујевачка гимназија	Крагујевац
Лена Танасковић	Краљ Александар I	Горњи Милановац
Лука Јаковљевић	Владислав Савић Јан	Паруновац
Лука Пећо	Гимназија Јован Јовановић Змај	Нови Сад
Максим Лазовић	Математичка гимназија	Краљево
Марија Михајловић	Математичка гимназија	Београд
Марко Ивковић	Јован Миодраговић	Београд
Марко Митић	Математичка гимназија	Београд
Марко Михајловић	Јован Поповић	Нови Сад
Марко Трајковић	Математичка гимназија	Београд
Матија Ивковић	Миле Дубљевић	Лајковац
Милан Лукић	Јован Поповић	Београд
Милан Рођевић	Филип Филиповић	Чачак
Милица Влашкалић	Математичка гимназија	Београд

Име и презиме	Школа	Место
Милица Тешић	Јанко Веселиновић	Шабац
Милош Савић	Николај Велимировић	Шабац
Мина Симић	Ваљевска Гимназија	Ваљево
Мирослав Мирић	Свети Сава Читлук	Читлук
Михаило Радовановић	Војислав Вока Савић	Лазаревац
Михајло Живановић	Математичка гимназија	Београд
Михајло Сладојевић	Гимназија Јован Јовановић Змај	Нови Сад
Михајло Срђевић	Жарко Зрењанин	Нови Сад
Наталија Милић	Прва крагујевацка гимназија	Крагујевац
Наталија Пантић	Стеван Немања	Стењевац
Никола Благојевић	Јован Миодраговић	Београд
Никола Ловренски	Јован Јовановић Змај	Нови Кнежевац
Никола Маричић	Дринка Павловић	Београд
Никола Милошевић	Трајко Стаменковић	Лесковац
Никола Минић	Математичка гимназија	Београд
Никола Нешовић	Станислав Сремчевић	Крагујевац
Нина Андрејевић	Математичка гимназија	Београд
Новак Деспотовић	Вук Караџић	Кикинда
Огњен Живановић	Јеврем Обреновић	Шабац
Огњен Јанковић	Математичка гимназија	Београд
Огњен Тодосијевић	Прва крагујевацка гимназија	Крагујевац
Павле Ивановић	Доситеј Обрадовић	Крушевац
Павле Станковић	Андра Савчић	Ваљево
Павле Станковић	Учитељ Таса	Ниш
Павле Шимпрага	Владислав Рибникар	Београд
Петар Стојиљковић	Гимназија Светозар Марковић	Ниш
Сара Врекић	Вук Караџић	Бачко Добро Поље
Сара Радојевић	Бошко Палковљевић Пинки	Земун
Сара Савић	Душко Радовић	Београд
Сергеј Михајловић	Вук Караџић	Пожаревац
Симон Савић	Гимназија Јован Јовановић Змај	Нови Сад
Снежана Томашевић	Гимназија Јован Јовановић Змај	Нови Сад
Соња Бојанић	Гимназија Јован Јовановић Змај	Нови Сад

Име и презиме	Школа	Место
Соња Ђорђевић	Марко Орешковић	Нови Београд
Софија Павлекић	Радоје Домановић	Нови Београд
Софија Станишић	Милош Црњански	Београд
Софија Чебашек	Математичка гимназија	Београд
Стефан Мишковић	Братство јединство	Сомбор
Стефан Славић	Ваљевска Гимназија	Ваљево
Стефан Спасић	Математичка гимназија	Београд
Страхиња Јовановић	Вук Караџић	Пирот
Тара Ивковић	Димитрије Туцовић	Краљево
Теодора Мишић	Вук Караџић	Књажевац
Теодора Обрадовић	Гимназија Светозар Марковић	Ниш
Тодор Дамњановић	Прва крагујевачка гимназија	Крагујевац
Урош Коруга	Здравко Гложански	Бечеј
Урош Костадиновић	Математичка гимназија	Београд
Урош Митровић	Лаза К. Лазаревић	Шабац
Урош Младенић	Математичка гимназија	Краљево
Урош Младеновић	Јован Јовановић Змај	Крушевац
Урош Стевановић	Гимназија Светозар Марковић	Ниш
Филип Гајић	Петефи Шандор	Нови Сад
Филип Мршовић	Јован Миодраговић	Београд
Филип Радић	Драган Лукић	Нови Београд

VIII РАЗРЕД

Име и презиме	Школа	Место
Алекса Данић	Драган Лукић	Нови Београд
Алекса Пауновић	Бранко Радичевић	Неготин
Александар Адакалић	Јеврем Обреновић	Шабац
Александар Милошевић	Гимназија Светозар Марковић	Ниш
Александар Савић	Бранко Радичевић	Земун
Ана Васић	Гимназија Јован Јовановић Змај	Нови Сад
Аница Петровић	Ваљевска Гимназија	Ваљево
Ања Дожић	Математичка гимназија	Београд
Богдан Здравковић	Јелена Ћетковић	Београд

Име и презиме	Школа	Место
Богдан Симовић	Филип Филиповић	Чачак
Борис Златановић	Коста Стаменковић	Лесковац
Викторија Ђорђевић	Николај Велимировић	Шабац
Вук Чађеновић	Браћа Вилотијевић	Краљево
Вукан Вукојевић	Деспот Стефан	Горњи Степош
Вукашин Бабић	Николај Велимировић	Шабац
Гвозден Лапчевић	Доситеј Обрадовић	Крушевац
Дана Рајковић	Васа Пелагић	Лесковац
Данило Окановић	Математичка гимназија	Београд
Данило Ранђеловић	Вук Караџић	Пожаревац
Димитрије Голубовић	Стефан Немања	Ниш
Драга Марјановић	Данило Киш	Београд
Дуња Милићевић	Стеван Јаковљевић	Параћин
Ђорђе Томић	Јован Јовановић Змај	Брус
Зрна Ћирић	Соња Маринковић	Земун
Ива Недељков	Гимназија Јован Јовановић Змај	Нови Сад
Иван Митровић	Математичка гимназија	Београд
Ирина Тамбурић	Математичка гимназија	Београд
Јаков Павловић	Живан Маричић - Жича	Краљево
Јана Митровић	Ваљевска Гимназија	Ваљево
Јана Шишовић	Математичка гимназија	Београд
Јанко Башчаревић	Прва крагујевачка гимназија	Крагујевац
Јанко Вукобратовић	Душан Јерковић	Инђија
Јован Милинковић	Лаза Костић	Нови Београд
Јован Милићев	Математичка гимназија	Београд
Јован Николић	Кадињача	Лозница
Јован Раденковић	Вожд Карађорђе	Алексинач
Јулија Петровић	Вук Караџић	Крушевац
Ката Христов	Гимназија Светозар Марковић	Ниш
Катарина Гавриловић	Лаза К. Лазаревић	Шабац
Коста Милошевић	Владислав Рибникар	Београд
Лазар Лазаревић	Ваљевска Гимназија	Ваљево
Лазар Стојадиновић	Јован Јовановић Змај	Обреновац

Име и презиме	Школа	Место
Лана Дерманов	Математичка гимназија	Београд
Лара Јоксимовић	Данило Киш	Београд
Лена Перишић	Математичка гимназија	Београд
Лука Бајовић	Милица Павловић	Чачак
Лука Вукомановић	Математичка гимназија	Београд
Лука Ђурић	Математичка гимназија	Београд
Лука Николић	Гимназија Светозар Марковић	Ниш
Љубодраг Радмиловић	Стевица Јовановић	Панчево
Маја Јованић	Математичка гимназија	Београд
Марко Марински	Вук Караџић	Београд
Марко Попадић	Математичка гимназија	Београд
Матеј Свобода	Владислав Рибникар	Београд
Матеја Безаревић	Математичка гимназија	Београд
Матеја Јефтић	Вук Караџић	Крушевац
Матија Кондић	Гимназија Јован Јовановић Змај	Нови Сад
Мила Грубовић	Математичка гимназија	Београд
Мила Миленић	Математичка гимназија	Београд
Мила Симеуновић	Кадињача	Лозница
Милана Тасовац	Математичка гимназија	Београд
Милица Гагић	Стевица Јовановић	Панчево
Милица Јевремовић	Бранко Радичевић	Неготин
Милица Јовичић	Кадињача	Лозница
Милица Крстић	8. септембар	Пирот
Милица Милошевић	Математичка гимназија	Београд
Милица Ћорилић	Кадињача	Лозница
Мира Вукмировић	Васа Чарапић	Београд
Михаило Јанчевић	Раде Кончар	Земун
Михаило Лекић	Ваљевска Гимназија	Ваљево
Михајло Цвејић	Гимназија Јован Јовановић Змај	Нови Сад
Наталија Старчевић	Прва основна школа краља Петра II	Ужице
Немања Марчетић	Гимназија Јован Јовановић Змај	Нови Сад
Никола Грујић	Јован Стерија Поповић	Нови Београд
Нина Станић	Ваљевска Гимназија	Ваљево

Име и презиме	Школа	Место
Новак Вуковић	Бранко Радичевић	Нови Београд
Павле Бугарски	Јован Јовановић Змај	Обреновац
Павле Јовановић	Светозар Марковић	Краљево
Павле Кулић	Десанка Максимовић	Зајечар
Петар Станић	Ђура Јакшић	Зрењанин
Петра Бабић	Прва крагујевачка гимназија	Крагујевац
Саша Павловић	Математичка гимназија	Београд
Софија Тиодоровић	Јанко Веселиновић	Београд
Софија Дулетић	Лаза Костић	Нови Београд
Софија Ненадовић	Андра Савчић	Ваљево
Стеван Радивојевић	Математичка гимназија	Београд
Страхиња Сврзић	Ђеле-кула	Ниш
Тадија Јелесијевић	Јован Поповић	Крушевац
Тамара Гузијан	Сава Шумановић	Земун
Тамара Радмиловић	Гимназија Јован Јовановић Змај	Нови Сад
Теодора Миленковић	Бранко Радичевић	Чента
Теодора Томановић	Гимназија Јован Јовановић Змај	Нови Сад
Теодора Џигал	20. октобар	Нови Београд
Тијана Тривуновић	Гимназија Јован Јовановић Змај	Нови Сад
Угљеша Кузманов	Стевица Јовановић	Панчево
Уна Лучић	Гимназија Јован Јовановић Змај	Нови Сад
Филип Бојковић	Математичка гимназија	Београд
Филип Гојковић	Математичка гимназија	Београд
Филип Марковић	Математичка гимназија	Београд
Хелена Малић	Свети Сава	Панчево