РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.02.2007.

Први разред – А категорија

1. Наћи остатак при дељењу броја $3^{1000} + 4^{1000}$ са 13.

Тангента 38, стр. 41.

Решење: Нађимо остатке дељења бројева облика 3^n при дељењу са 13. Ако је r остатак добијен при дељењу степена 3^n са 13 онда је остатак дељења броја 3^{n+1} са 13 исти као и остатак дељења броја $3r$ са 13. Заиста, по претпоставци $3^n - r$ је дељив са 13 па је према томе $3^{n+1} - 3r$ такође дељив са 13. Овим поступком добијамо следећу таблицу остатака:

$$\begin{array}{cccccccc} 3 & 3^2 & 3^3 & 3^4 & 3^5 & 3^6 & 3^7 & \dots \\ 3 & 9 & 1 & 3 & 9 & 1 & 3 & \dots \end{array}$$

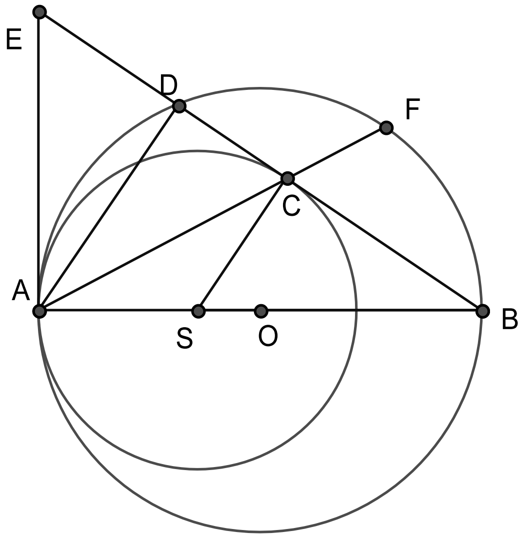
Уочавамо периодичност остатака и закључујемо да је остатак дељења 3^{1000} са 13 једнак 3. Сличан поступак налажења периодичности остатка може се применити и на случај степена 4^{1000}. Алтернативно се тражени остатак може одредити и на следећи начин. Уочимо да је $4^3 = 64 = 5 \cdot 13 - 1$. Одавде закључујемо да је

$$4^{999} = (4^3)^{333} = (5 \cdot 13 - 1)(5 \cdot 13 - 1) \cdot \ldots \cdot (5 \cdot 13 - 1) = 13 \cdot k - 1$$

за неки природан број k. Према томе остатак дељења броја 4^{1000} са 13 је 9.

Закључак: Тражени остатак је 12.

2. Дата су два круга који се додирују изнутра у тачки A. Ако се из друге крајње тачке B пречника AB спољашњег круга конструише права која додирује унутрашњи круг у тачки C и сече спољашњи круг у тачки D, доказати да је права AC бисектриса угла BAD.



Решење 1: Конструишимо заједничку тангенту у тачки A. Пресек тангенте и праве BD је тачка E. Како је $EA = EC$ (тангентне дужи) то је $\sphericalangle EAC = \sphericalangle ECA$. Из те једнакости као и из једнакости $\sphericalangle EAC = \sphericalangle EAD + \sphericalangle DAF$ следи $\sphericalangle EAC = \sphericalangle FCB = \sphericalangle FAB + \sphericalangle EBA = \sphericalangle FAB + \sphericalangle EAD$ (јер је $\sphericalangle EAD = \sphericalangle EBA$). Одавде следи да је $\sphericalangle DAF = \sphericalangle FAB$, што значи да је AC бисектриса угла BAD.

Решење 2: Спојимо S центар унутрашњег круга и C. Тада је $\sphericalangle SCB = 90^o$ (полупречник и тангента), и $\sphericalangle ADB = 90^o$ (угао над пречником). Одавде следи да је $\sphericalangle DAB = \sphericalangle CSB$ (углови са паралелним крацима), и $\sphericalangle CSB = 2\sphericalangle CAB$ (централни и периферијски угао). Одатле следи да је права AF бисектриса угла DAB.

3. За елемент пермутације кажемо да је десно минималан ако је мањи од свих елемената који се налазе десно од њега. На пример у пермутацији (2, 1, 4, 6, 3, 7, 8, 5) десно минимални су елементи на другој и петој позицији (елементи 1 и 3). Колико има различитих пермутација елемената скупа {1, 2,..., 8} које имају десно минималне елементе на другој и петој позицији (и можда још на неким другим позицијама)?

Решење: На првој позицији пермутације може бити било који број, те га можемо изабрати на 8 начина. Након тога, број на другој позицији мора бити најмањи од преосталих бројева да би био десно минималан, па је одређен једнозначно. Бројеве на позицијама три и четири опет можемо изабрати произвољно од преосталих бројева, на $6 \cdot 5$ начина. Број који следи мора бити најмањи од преосталих, па је стога број на позицији пет јединствено одређен. Преостали бројеви могу се поређати произвољно, на $3 \cdot 2 \cdot 1$ начина. Дакле, укупан број пермутација које имају десно минималне бројеве на другој и петој позицији је $8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1440$.

4. Уз претпоставку $0 < b \leqslant a$ доказати неједнакост

$$\frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{a} \leqslant \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{b}.$$

Под којим условима нека од неједнакости прелази у једнакост?

Решење:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} = \frac{(a-b)^2}{2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$$

$$\frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{a} = \frac{(a-b)^2}{2(2\sqrt{a})^2} \leqslant \frac{(a-b)^2}{2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \leqslant \frac{(a-b)^2}{2(2\sqrt{b})^2} = \frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{b}$$

Једнакост важи ако и само ако је $a = b$.

5. У зависности од природног броја n наћи највећи заједнички делилац бројева n^2+1 и $(n+1)^2+1$.

Решење: Нека је $d = NZD(n^2+1, (n+1)^2+1)$. Тада $d \mid (n+1)^2 + 1 - (n^2+1)$, односно $d \mid 2n+1$. Отуда $d \mid n^2+1-(2n+1)$, односно $d \mid n(n-2)$. Одавде, како је d узајамно прост са n (јер ако је $k = NZD(n^2+1, n)$ добијамо да $k \mid n^2+1-n^2$, односно $k=1$), закључујемо да $d \mid n-2$. Напокон како смо добили да $d \mid 2n+1$ и $d \mid n-2$, то $d \mid (2n+1)-2(n-2)$, односно $d \mid 5$. Одавде су једине потенцијалне вредности за d бројеви 1 и 5.

Одредимо сада остатак при дељењу броја n^2+1 са 5. Лако налазимо да уколико n има редом остатке $0, 1, 2, 3, 4$ при дељењу са 5, онда број n^2+1 има редом остатке $1, 2, 0, 0, 2$ при дељењу са 5. Зато је $d = 5$ акко n при дељењу са 5 даје остатак 2, док је у свим осталим случајевима $d = 1$.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

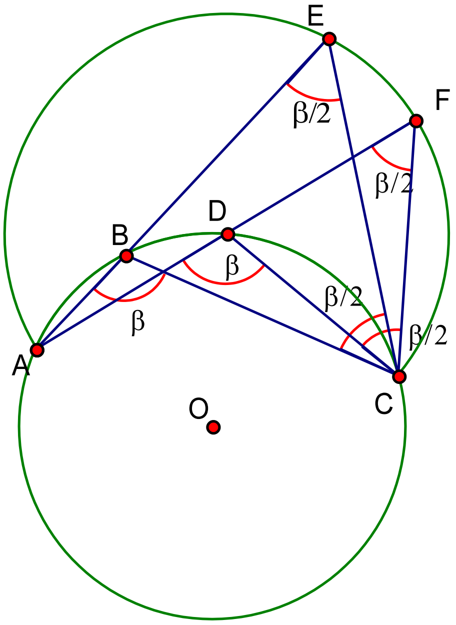
ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.02.2007.

Други разред – А категорија

1. Нека је AC тетива кружнице полупречника R којој одговара централни угао ϕ. На кружном луку који одговара овој тетиви (унутар угла ϕ) одредити тачку B тако да збир дужина тетива AB и BC буде максималан. Колики је тај збир?

Решење 1: Нека је $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ACB = \gamma$ и $\sphericalangle ABC = \beta$. По синусној теореми $AB+BC = 2R(\sin\alpha+\sin\gamma) = 4R\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2})\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}$. Максимум овог израза се постиже за $\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} = 1$, тј. $\alpha = \gamma = \frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2}$. Дакле, $AB = BC = 2R\sin\frac{\alpha}{2} = 2R\cos\frac{\beta}{2}$, а максималан збир износи $4R\cos\frac{\beta}{2}$.



Решење 2: Продужимо дуж AB до тачке E тако да важи $BE = BC$, односно $AE = AB+BC$. Троугао BCE је једнакокрак, а како је $\sphericalangle ABC = \beta$ спољашњи за овај троугао следи да је $\sphericalangle BEC = \sphericalangle ECB = \frac{\beta}{2}$. Конструишимо тачку D на задатој кружници тако да је $AD = DC$ и $\sphericalangle ADC = \beta$. Поновимо поступак за тачку D као и за тачку B. Конструишимо тачку F тако да важи $DC = DF$, односно $AF = AD + DC$. На исти начин важи да је $\sphericalangle DFC = \sphericalangle FCD = \frac{\beta}{2}$. Тачке E и F припадају геометријском месту тачака из којих се дуж AC види под углом $\frac{\beta}{2}$ (али са исте стране праве AC са које су B и D). Геометријско место тачака је лук са центром у тачки D. Пошто је пречник најдужа тетива, онда

следи да је максималан збир тетива у случају тачке D односно када је $AB = BC$.

2. За које $a \in \mathbb{R}$ су сва решења једначине

$$3ax^2 + (3a^3 - 12a^2 - 1)x - a(a-4) = 0$$

реална и задовољавају услов $|x| < 1$?

Решење: Дискриминанта дате једначине је

$$D = [3a^3 - 12a^2 - 1]^2 + 12a^2(a-4) = [3a^2(a-4) - 1]^2 + 12a^2(a-4) =$$

$$9a^4(a-4)^2 - 6a^2(a-4) + 1 + 12a^2(a-4) = 9a^4(a-4)^2 + 6a^2(a-4) + 1 =$$
$$= [3a^3 - 12a^2 + 1]^2$$

па су нуле ове једначине (за $a \neq 0$)

$$x_{1/2} = \frac{-3a^3 + 12a^2 + 1 \pm (3a^3 - 12a^2 + 1)}{6a}$$

тј. $x_1 = \frac{1}{3a}$ и $x_2 = -a(a-4)$. За $a = 0$ јединствено решење $x = 0$ припада интервалу $(-1, 1)$. За $a \neq 0$, нуле једначине задовољавају услов ако и само ако

$$\left|\frac{1}{3a}\right| < 1 \quad \wedge \quad -1 < -a^2 + 4a < 1$$

Друга неједначина је еквивалетна са

$$3 < (a-2)^2 < 5 \Leftrightarrow \sqrt{3} < |a-2| < \sqrt{5} \Leftrightarrow a \in (2-\sqrt{5}, 2-\sqrt{3}) \cup (2+\sqrt{3}, 2+\sqrt{5}).$$

Елементи из првог интервала не задовољавају услов $\frac{1}{3} < |a|$ одакле коначно добијамо да a задовољава услове задатка ако и само ако је $a \in \{0\} \cup (2+\sqrt{3}, 2+\sqrt{5})$.

3. Нека је $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ функција дефинисана на следећи начин

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} NZD(i, n), \text{ за свако } n \in \mathbb{N}.$$

Наћи $f(2^{2007})$.

Решење: Нека је p прост број а α ненегативан цео број. Одредићемо $f(p^\alpha)$. Очигледно да за свако x, $0 \leq x \leq p^\alpha$ важи да је $NZD(x, p^\alpha) = p^a$, за неко $0 \leq a \leq \alpha$. Одредимо колико има бројева x таквих да је $NZD(x, p^\alpha) = p^a$ за задато a. Претходни услов је еквивалентан услову $p^a \mid x$ и $p^{a+1} \nmid x$. Оваквих бројева има укупно $p^{\alpha-a} - p^{\alpha-a-1}$ ако је $a < \alpha$, односно 1 ако је $a = \alpha$. Према томе имамо да је:

$$f(p^\alpha) = 1 \cdot p^\alpha + \sum_{a=0}^{\alpha-1} \left(p^{\alpha-a} - p^{\alpha-a-1}\right) \cdot p^a = p^\alpha \left(1 + \alpha\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right).$$

Ако ставимо $p = 2$ и $\alpha = 2007$ добијамо да је $f(2^{2007}) = 2009 \cdot 2^{2006}$.

4. Да ли има више релација еквиваленције или релација поретка на скупу $\{1, 2, \dots, n\}$, где је $n \in \mathbb{N}$?

Решење: Од сваке релације еквиваленције можемо направити једну релацију поретка, тако што ћемо оставити само оне елементе $a \, \rho \, b$ из релације еквиваленције за које важи $a \leqslant b$. Лако је проверити да је овако задата релација P,AC,T, па је то релација поретка. Такође није тешко доказати и да различите релације еквиваленције индукују различите релације поретка. Како од пуне релације еквиваленције (у којој је сваки елемент у релацији са сваким) можемо добити још 1 релацију поретка, ако узмемо елементе $a \geqslant b$. За ову релацију се аналогно показује да је релација поретка, а различита је од претходно одређених. Стога релација поретка има више од релација еквиваленције на скупу $\{1, 2, \dots, n\}$ за $n > 1$.

За $n = 1$ имамо само 1 релацију еквиваленције која је истовремено и релација поретка: $\rho = \{(1, 1)\}$. Дакле у овом случају имамо једнако релација поретка и релација еквиваленције.

5. Одредити све реалне бројеве x и y за које важи једнакост

$$x^2 - 2x\cos(xy) + 1 = 0.$$

Тангента 41, M474

Решење: Наведена једначина је еквивалентна са

$$x^2 - 2x\cos(xy) + \cos^2(xy) + \sin^2(xy) = (x - \cos(xy))^2 + \sin^2(xy) = 0$$

што је еквивалентно систему једначина

$$x - \cos(xy) = 0 \qquad \sin(xy) = 0.$$

Ако је $\sin(xy) = 0$ онда је $\cos(xy) = \pm 1$ тј. или је $x = 1$ или $x = -1$. У првом случају $(x = +1)$ из услова $\cos y = 1$ добијамо $y = 2k\pi$ за неки цео број k. У другом случају $(x = -1)$ из услова $\cos(-y) = -1$ добијамо $y = (2m + 1)\pi$ за неки цео број m. Закључујемо да је (x, y) решење полазне једначине ако и само ако је

$$(x, y) \in \{(+1, 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(-1, (2m + 1)\pi) \mid m \in \mathbb{Z}\}.$$

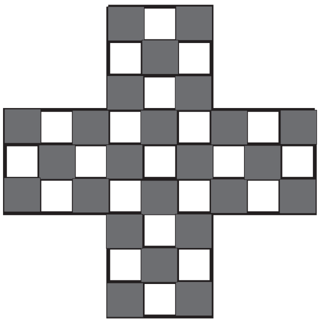
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

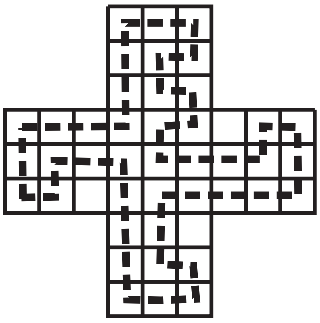
ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.02.2007.

Трећи разред – А категорија

1. Замак има форму неконвексног 12-тоугла (као на слици) са укупно 45 квадратних одаја. Између сваке две одаје које имају заједнички зид постоје врата. Туриста креће из неке одаје и жели да обиђе што више одаја и да се врати у полазну одају, али тако да у сваку одају уђе највише једанпут. Колико највише одаја он може овако да посети?





Решење: На слици се види тура туристе којом се обилази 42 одаје. Докажимо да туриста не може посетити више одаја под датим условима. Обојимо одаје црно-бело (шаховски) тако да има 24 црне и 21 белу одају. Како туриста пролази суседним одајама које су различито обојене на његовој тури има исти број белих и црних одаја. Зато на свакој тури нема више од $21 + 21 = 42$ одаје.

2. Наћи све полиноме облика $x^n \pm x^{n-1} \pm x^{n-2} \pm ... \pm x \pm 1$ који имају све корене реалне.

Решење: Нека су $x_1, ..., x_n$ корени полинома $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ где је $a_i = \pm 1$. У случају $n = 1$ лако се налазе два решења $x \pm 1$ па зато претпоставимо да је $n > 1$. Користећи Виетове формуле имамо

$$x_1^2+x_2^2+...+x_n^2 = (x_1+...+x_n)^2-2(x_1x_2+...+x_{n-1}x_n) = a_{n-1}^2-2a_{n-2} = 1\pm 2.$$

Како су по услову задатка сви корени реални, збир квадрата мора бити позитиван, па имамо да је $x_1^2 + ... + x_n^2 = 3$, тј. $a_{n-2} = -1$. Слично је и $x_1^2x_2^2 \cdots x_n^2 = a_0^2 = 1$. Користећи неједнакост између аритметичке и геометријске средине добијамо:

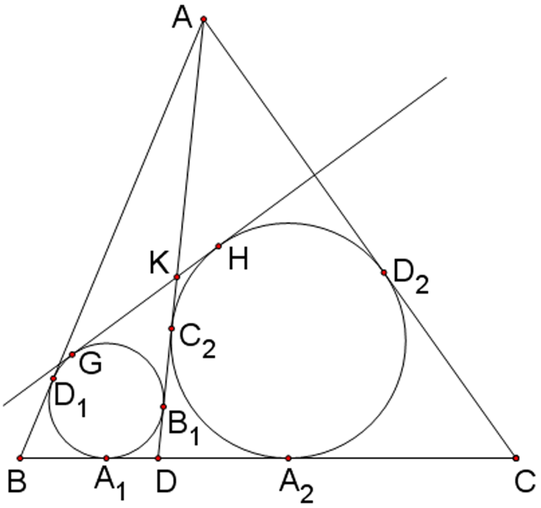
$$\frac{3}{n} = \frac{1}{n}(x_1^2 + ... + x_n^2) \geqslant \sqrt[n]{x_1^2 \cdots x_n^2} = 1$$

одакле је $n \leqslant 3$, при чему једнакост $n = 3$ важи акко $x_1^2 = x_2^2 = x_3^2 = 1$. Одатле добијамо за случај $n = 3$ два решења $(x^2 - 1)(x \pm$

1). У случају $n = 2$ лако се добијају још два решења $x^2 \pm x - 1$, док у случају $n = 1$ имамо такође два решења $x \pm 1$.

3. На страни BC троугла ABC уочимо тачку D и уочимо уписане кругове у троуглове ABD и ACD. Заједничка спољашња тангента ова два круга, различита од праве BC, сече дуж AD у тачки K. Доказати да дужина дужи AK не зависи од положаја тачке D.

Решење: Означимо са A_1, B_1, D_1 тачке у којима уписани круг у троугао ABD додирује странице BD, AD, AB; и означимо са A_2, C_2, D_2 тачке у којима уписани круг у троугао ACD додирује странице CD, AD, AC. Нека је $AC = b$, $AB = c$, $BD = u$, $DC = v$ и $AD = d$. Нека су G и H тачке у којима заједничка спољашња тангента различита од BC додирује кругове уписане у троуглове ABD и ACD.



Тада је

$$\begin{aligned} 2AK &= (AB_1 - GK) + (AC_2 - HK) \\ &= AB_1 + AC_2 - GH \\ &= AD_1 + AD_2 - A_1A_2 \\ &= AD_1 + AD_2 - DA_1 - DA_2. \end{aligned}$$

Међутим, $AD_1 = \frac{c+d-u}{2}$, $AD_2 = \frac{b+d-v}{2}$, $DA_1 = \frac{d+u-c}{2}$, $DA_2 = \frac{d+v-b}{2}$. Заменом добијамо

$$2AK = \frac{c+d-u+b+d-v-d-u+c-d-v+b}{2} = b+c-u-v = AC+AB-BC,$$

односно $AK = (AB + AC - BC)/2$, што зависи само од дужина страница троугла ABC. $\Box$

4. Наћи све природне бројеве n мање од 100 којима је збир цифара у декадном запису једнак збиру цифара у бинарном запису.

Решење: Означимо редом са $S_{10}(n)$ и $S_2(n)$ збир цифара природног броја n у декадном, односно бинарном систему. Како је $n < 100 < 2^7$, то број n у бинарном систему има највише 7 цифара, па је $S_2(n) \leqslant 7$. Нека је $\overline{a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0}$ запис броја n у бинарном систему, тако да он може да почиње и одређеним бројем нула. Како је тада $n = a_6 \cdot 2^6 + a_5 \cdot 2^5 + a_4 \cdot 2^4 + a_3 \cdot 2^3 + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0$, то је $n \equiv_3 (a_0 + a_2 + a_4 + a_6) - (a_1 + a_3 + a_5)$. Одавде, како је $n \equiv_3 S_{10}(n) \equiv_3 S_2(n) = (a_0 + a_2 + a_4 + a_6) + (a_1 + a_3 + a_5)$, налазимо да је $2(a_1 + a_3 + a_5) \equiv_3 0$, односно $a_1 + a_3 + a_5 \in \{0, 3\}$ (јер је $0 \leqslant a_1 + a_3 + a_5 \leqslant 3$). Дакле, за природан број n важи да су бинарне цифре a_1, a_3 и a_5 једнаке међу собом. Сада разликујемо два случаја:

1° $a_1 = a_3 = a_5 = 0$. Сада је $S_2(n) \leqslant 4$. Зато је $a_6 = 0$, јер би у супротном било $n \geqslant 64$ одакле је $S_{10}(n) \geqslant 7$, што је немогуће. Дакле, $S_2(n) \leqslant 3$, $n \leqslant 2^4 + 2^2 + 2^0 = 21$ и $n \equiv_4 a_0 \in \{0, 1\}$, те је $n \in \{21, 20, 12, 2, 1\}$. Провером добијамо да су решења $n = 1$, $n = 20$ и $n = 21$.

2° $a_1 = a_3 = a_5 = 1$. Зато је $n \geqslant 2^5 + 2^3 + 2^1 = 42$, па је $S_{10}(n) \geqslant 5$. Приметимо да је $a_6 = 0$, јер би у супротном било $n \geqslant 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^1 = 106$. Зато је и $S_{10}(n) \leqslant 6$. Из овога закључујемо да је $n \in \{60, 51, 42, 50\}$. Провером добијамо да ни један број из овог скупа није решење.

Једине вредности природног броја n, $n < 100$ који задовољавају услов задатка су $n = 1$, $n = 20$ и $n = 21$.

5. Наћи сва реална решења једначине $\left(2 + \sqrt{3}\right)^x + 1 = \left(2 \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^x$.

Тангента 34, М340

Решење: Уведимо ознаку $a = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ одакле следи $a^2 = 2 + \sqrt{3}$. Овом сменом наша једначина добија облик

$$a^{2x} + 1 = (2a)^x.$$

Бројеви $2 + \sqrt{3}$ и $2 - \sqrt{3}$ су решења једначине $x^2 - 4x + 1 = 0$ одакле добијамо једнакост

$$a^4 + 1 = 4a^2.$$

Упоређивањем закључујемо да је $x = 2$ једно решење наше једначине. То је и једино решење. Заиста, дељењем са $(2a)^x$ добијамо да је наша једначина еквивалентна са

$$\left(\frac{a}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2a}\right)^x = 1.$$

На левој страни је функција од x која монотоно опада; ово следи из чињенице да је $\frac{a}{2} < 1$ и $\frac{1}{2a} < 1$. Закључујемо да може постојати највише једна вредност x за коју та функција узима вредност 1.

Закључак: Једино решење наше једначине је $x = 2$.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

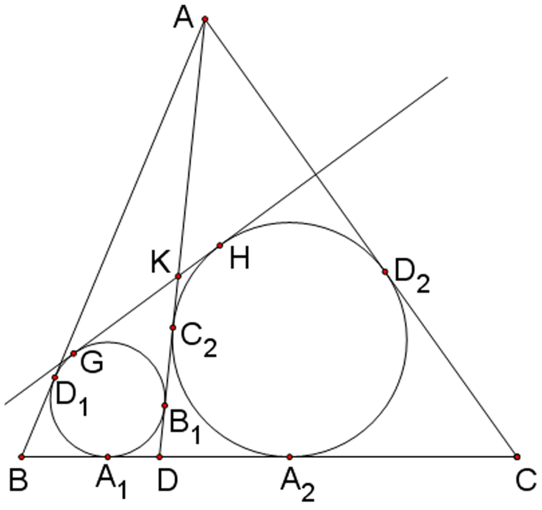
ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.02.2007.

Четврти разред – А категорија

1. На страни BC троугла ABC уочимо тачку D и уочимо уписане кругове у троуглове ABD и ACD. Заједничка спољашња тангента ова два круга, различита од праве BC, сече дуж AD у тачки K. Доказати да дужина дужи AK не зависи од положаја тачке D.

Решење: Означимо са A_1, B_1, D_1 тачке у којима уписани круг у троугао ABD додирује странице BD, AD, AB; и означимо са A_2, C_2, D_2 тачке у којима уписани круг у троугао ACD додирује странице CD, AD, AC. Нека је $AC = b$, $AB = c$, $BD = u$, $DC = v$ и $AD = d$. Нека су G и H тачке у којима заједничка спољашња тангента различита од BC додирује кругове уписане у троуглове ABD и ACD.



Тада је

$$\begin{aligned} 2AK &= (AB_1 - GK) + (AC_2 - HK) \\ &= AB_1 + AC_2 - GH \\ &= AD_1 + AD_2 - A_1A_2 \\ &= AD_1 + AD_2 - DA_1 - DA_2. \end{aligned}$$

Међутим, $AD_1 = \frac{c+d-u}{2}$, $AD_2 = \frac{b+d-v}{2}$, $DA_1 = \frac{d+u-c}{2}$, $DA_2 = \frac{d+v-b}{2}$. Заменом добијамо

$$2AK = \frac{c+d-u+b+d-v-d-u+c-d-v+b}{2} = b+c-u-v = AC+AB-BC,$$

односно $AK = (AB + AC - BC)/2$, што зависи само од дужина страница троугла ABC. $\square$

2. За дати природан број n, у скупу позитивних реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + ... + nx_n &= \frac{n(n+1)}{2} \\ {x_1}^1 + {x_2}^2 + ... + {x_n}^n &= n\ . \end{aligned}$$

Решење: Нека је $(x_1, x_2, ..., x_n)$ решење датог система. Одузимањем прве једначине од друге и груписањем сабирака добијамо

$$\sum_{i=2}^{n}(x_i^i - 1 - i(x_i - 1)) = 0. \qquad (*)$$

Доказимо да је сваки сабирак леве стране једначине $(*)$ ненегативан.

Први начин: Нека је $2 \leqslant i \leqslant n$. Коришћењем неједнакости између аритметичке и геометријске средине имамо

$$\frac{x_i^i + i - 1}{i} = \frac{x_i^i + 1 + ... + 1}{i} \geqslant \sqrt[i]{x_i^i \cdot 1 \cdot ... \cdot 1} = x_i.$$

Знак једнакости важи акко је $x_i^i = 1$, односно $x_i = 1$.

Други начин: Посматрајмо за фиксирано $k \in N,\ k > 1$, полином $P_k(x) = x^k - 1 - k(x-1)$. Како је $P_k'(x) = kx^{k-1} - k = k(x^{k-1} - 1)$ закључујемо да се на $[0, \infty)$ минимум функције $P_k(x)$ достиже за $x = 1$, при чему је $P_k(1) = 0$.

Овим смо доказали да су заиста сви сабирци леве стране у једначини $(*)$ ненегативни, па како је њихов збир једнак нули, то добијамо да и они морају бити једнаки нули. Ово је једино могуће у случају $x_2 = x_3 = ... = x_n = 1$. Сада лако налазимо да је и $x_1 = 1$, чиме смо доказали да дати систем има јединствено решење $(1, 1, ..., 1)$.

3. Нека су m, n и k природни бројеви. Познато је да се правоугаона таблица димензија $m \times n$ може поплочати (без преклапања) правоугаоницима $1 \times k$. Доказати да је бар један од бројева m и n дељив са k.

Решење: Обојимо јединична поља табле помоћу k боја и то "редом" (наизменично). На тако обојеној табли сваки правоугаоник прекрива тачно једно поље сваке боје. Зато је неопходан (не и довољан) услов за поплочавање табле да је једнак број поља обојен сваком бојом. Претпоставимо сада да бројеви m и n нису дељиви са k и нека су њихови остаци при дељењу са k, редом једнаки a и b, при чему је $0 < a, b < k$. Уочимо горњи десни део почетне табле димензије $a \times b$. У остатку табле имамо једнак број поља обојених сваком од k боја. Доказ би завршили ако докажемо да у уоченом делу немамо једнак број поља сваке боје. Размотримо случај $a \geq b$. Уочимо боју означену бројем a. Тада у свакој врсти уоченог дела таблице имамо по једно поље обојено бојом a. Ако би се десило да су све боје једнако заступљене, онда би број обојених поља у уоченом делу био kb, што није могуће јер их је тачно ab. Слично овом разматра се случај $a < b$ (тада свака колона уоченог дела садржи једно поље боје b). Овим смо добили контрадикцију, те закључујемо да претпоставка није била тачна.

4. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$x + y = 1$$

$$(x^4 + y^2)(x^2 + y^4) = 85.$$

Решење: Нека је $xy = a$. Тада користећи $x + y = 1$ добијамо

$$85 = (x^4 + y^2)(x^2 + y^4) = x^6 + y^6 + x^4y^4 + x^2y^2 =$$

$$= (x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4) + x^4y^4 + x^2y^2 =$$
$$= (x^2 + y^2)((x^2 + y^2)^2 - 3x^2y^2) + x^4y^4 + x^2y^2 =$$
$$= (1 - 2a)((1 - 2a)^2 - 3a^2) + a^4 + a^2 =$$
$$= a^4 - 2a^3 + 10a^2 - 6a + 1,$$

односно $a^4-2a^3+10a^2-6a-84 = 0$. Једно решење ове једначине је $a = -2$, одакле се лако добија $a^4-2a^3+10a^2-6a-84 = (a+2)P(a)$, где је $P(a) = a^3-4a^2+18a-42$. Како је $P'(a) = 3a^2-8a+18 > 0$ за свако $a \in \mathbb{R}$, то је $P(a)$ растућа функција, па једначина $P(a) = 0$ има највише једно решење. Како је $P(a)$ полином непарног степена, то он има бар једну реалну нулу. Дакле, једначина $P(a) = 0$ има тачно једно реално решење. Како је $P(1)P(4) < 0$, због непрекидности, закључујемо да је то решење из интервала $(1, 4)$. За ову вредност a важило би $x^2+y^2 = (x+y)^2-2xy = 1-2a < -1$, што није могуће. Овим смо доказали да је једина могућност $a = -2$. Тада је лако установити да су решења полазног система уређени парови $(2, -1)$ и $(-1, 2)$.

5. Наћи сва реална решења једначине $\left(2+\sqrt{3}\right)^x+1 = \left(2 \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x$.

Тангента 34, М340

Решење: Уведимо ознаку $a = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ одакле следи $a^2 = 2 + \sqrt{3}$. Овом сменом наша једначина добија облик

$$a^{2x} + 1 = (2a)^x.$$

Бројеви $2+\sqrt{3}$ и $2-\sqrt{3}$ су решења једначине $x^2-4x+1=0$ одакле добијамо једнакост

$$a^4+1=4a^2.$$

Упоређивањем закључујемо да је $x=2$ једно решење наше једначине. То је и једино решење. Заиста, дељењем са $(2a)^x$ добијамо да је наша једначина еквивалентна са

$$\left(\frac{a}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{2a}\right)^x=1.$$

На левој страни је функција од x која монотоно опада; ово следи из чињенице да је $\frac{a}{2}<1$ и $\frac{1}{2a}<1$. Закључујемо да може постојати највише једна вредност x за коју та функција узима вредност 1.

Закључак: Једино решење наше једначине је $x=2$.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.02.2007.

Први разред – Б категорија

1. Наћи остатак при дељењу броја $3^{1000} + 4^{1000}$ са 13.

Тангента 38, стр. 41.

Решење: Нађимо остатке дељења бројева облика 3^n при дељењу са 13. Ако је r остатак добијен при дељењу степена 3^n са 13 онда је остатак дељења броја 3^{n+1} са 13 исти као и остатак дељења броја $3r$ са 13. Заиста, по претпоставци $3^n - r$ је дељив са 13 па је према томе $3^{n+1} - 3r$ такође дељив са 13. Овим поступком добијамо следећу таблицу остатака:

3	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	$\ldots$
3	9	1	3	9	1	3	$\ldots$

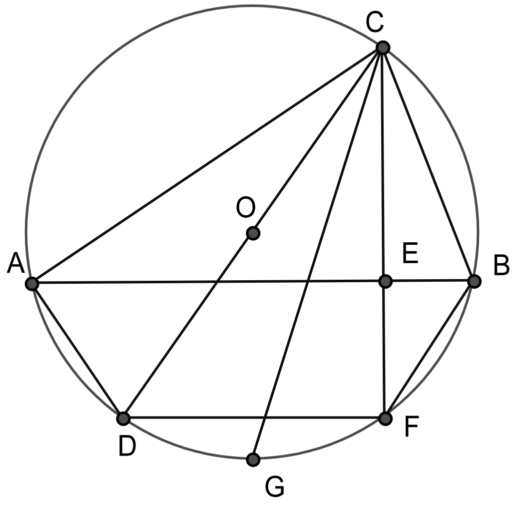
Уочавамо периодичност остатака и закључујемо да је остатак дељења 3^{1000} са 13 једнак 3. Сличан поступак налажења периодичности остатка може се применити и на случај степена 4^{1000}. Алтернативно се тражени остатак може одредити и на следећи начин. Уочимо да је $4^3 = 64 = 5 \cdot 13 - 1$. Одавде закључујемо да је

$$4^{999} = (4^3)^{333} = (5 \cdot 13 - 1)(5 \cdot 13 - 1) \cdot \ldots \cdot (5 \cdot 13 - 1) = 13 \cdot k - 1$$

за неки природан број k. Према томе остатак дељења броја 4^{1000} са 13 је 9.

Закључак: Тражени остатак је 12.

2. Бисектриса унутрашњег угла $\sphericalangle ACB$ троугла ABC уједно је и бисектриса угла који образује пречник CD описаног круга и висина конструисана из темена C. Доказати!



Решење: Нека је дат троугао ABC. Опишемо око њега круг и конструишимо бисектрису угла C. Она сече кружну линију у тачки G. Тачка G је средина лука AGB (једнаки периферијски углови). Конструишимо пречник CD и висину CE чији продужетак сече кружну линију у тачки F.

Први доказ: Ако покажемо да је $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCF$, онда ће важити и $\sphericalangle DCG = \sphericalangle FCG$. $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC$ (над истом тетивом). Троугао DAC је правоугли (CD је пречник). Троугао BEC је правоугли (E је подножје висине). Из ових чињеница следи једнакост углова $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCF$. Овим је доказ завршен.

Други доказ: Ако покажемо да су лукови AD и BF једнаки онда ће и периферијски углови бити једнаки. $\sphericalangle AEC = 90^o$ (подножје висине) $\sphericalangle DFC = 90^o$ (над пречником CD). Одавде следи да су тетиве AB и DF паралелне што значи да су лукови AD и FB једнаки.

3. За елемент пермутације кажемо да је десно минималан ако је мањи од свих елемената који се налазе десно од њега. На пример у пермутацији (2, 1, 4, 6, 3, 7, 8, 5) десно минимални су елементи на другој и петој позицији (елементи 1 и 3). Колико има различитих пермутација елемената скупа $\{1, 2, \ldots, 8\}$ које имају десно минималне елементе на другој и петој позицији (и можда још на неким другим позицијама)?

Решење: На првој позицији пермутације може бити било који број, те га можемо изабрати на 8 начина. Након тога, број на другој позицији мора бити најмањи од преосталих бројева да би био десно минималан, па је одређен једнозначно. Бројеве на позицијама три и четири опет можемо изабрати произвољно од преосталих бројева, на $6 \cdot 5$ начина. Број који следи мора бити најмањи од преосталих, па је стога број на позицији пет јединствено одређен. Преостали бројеви могу се поређати произвољно, на $3 \cdot 2 \cdot 1$ начина. Дакле, укупан број пермутација које имају десно минималне бројеве на другој и петој позицији је $8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1440$.

4. Уз претпоставку $0 < b \leqslant a$ доказати неједнакост

$$\frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{a} \leqslant \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{b}.$$

Под којим условима нека од неједнакости прелази у једнакост.

Решење:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} = \frac{(a-b)^2}{2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$$

$$\frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{a} = \frac{(a-b)^2}{2(2\sqrt{a})^2} \leqslant \frac{(a-b)^2}{2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \leqslant \frac{(a-b)^2}{2(2\sqrt{b})^2} = \frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{b}$$

Једнакост важи ако и само ако је $a = b$.

5. Познато је да је површина троугла $P = \frac{15}{4}$ као и да важе једнакости $a + c = 8$ и $\beta = 30^\circ$. Наћи странице a, b, c овог троугла.

Тангента 38, стр. 43

Решење: Нека је $x = BD$ и $y = CD$ где је D подножје висине из A на страну BC (слика). Пошто је $\beta = 30^\circ$ закључујемо да је $h = \frac{c}{2}$. Одавде следи $P = \frac{15}{4} = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a \cdot c}{4}$ па за одређивање дужина a и c имамо једначине

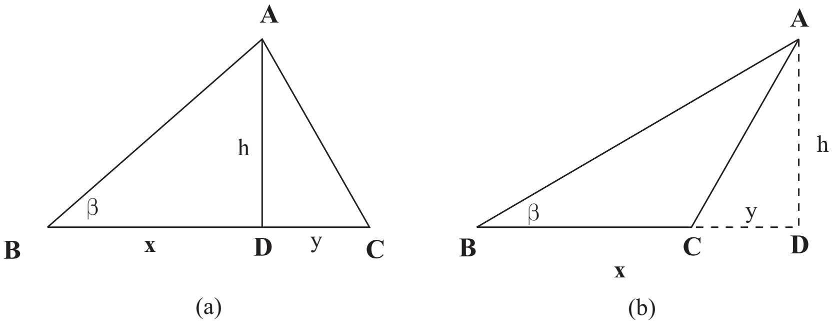
$$a + c = 8 \qquad a \cdot c = 15.$$

Решења $a = 3, b = 5$ и $a = 5, b = 3$ могу се у овом случају лако и погодити. Алтернативно се квадрирањем прве једначине и коришћењем друге добија $a^2 + b^2 = 34$. Одавде следи $a^2 - 2ac + b^2 = (a - c)^2 = 4$ тј. $a - c = \pm 2$ итд.

Први случај: $a = BC = 5$, $c = AB = 3$ одакле следи $h = \frac{c}{2} = \frac{3}{2}$.

У овом случају из правоуглог троугла ΔABD налазимо да је $x = \frac{3\sqrt{3}}{2} < BC = a$ (слика (a)) и $y = 5 - \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Из правоуглог троугла ΔADC налазимо

$$b = AC = \sqrt{h^2 + y^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \left(5 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{34 - 15\sqrt{3}}.$$



(a) (b)

Други случај: $a = BC = 3$, $c = AB = 5$ одакле следи $h = \frac{c}{2} = \frac{5}{2}$.

У овом случају из правоуглог троугла ΔABD налазимо да је $x = BD = \frac{5\sqrt{3}}{2} > BC = a$ (слика (б)) и $y = x - a = \frac{5\sqrt{3}}{2} - 3$. Из правоуглог троугла ΔADC налазимо

$$b = AC = \sqrt{h^2 + y^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \left(\frac{5\sqrt{3}}{2} - 3\right)^2} = \sqrt{34 - 15\sqrt{3}}.$$

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.02.2007.

Други разред – Б категорија

1. Одредити остатке при дељењу

(1) броја $3^{1000} + 4^{1000}$ са 13,

(2) броја $9^{222} + 4^{333}$ са 5.

Тангента 38, стр. 41.

Решење: (први део задатка) Нађимо остатке дељења бројева облика 3^n при дељењу са 13. Ако је r остатак добијен при дељењу степена 3^n са 13 онда је остатак дељења броја 3^{n+1} са 13 исти као и остатак дељења броја $3r$ са 13. Заиста, по претпоставци $3^n - r$ је дељив са 13 па је према томе $3^{n+1} - 3r$ такође дељив са 13. Овим поступком добијамо следећу таблицу остатака:

3	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	$\dots$
3	9	1	3	9	1	3	$\dots$

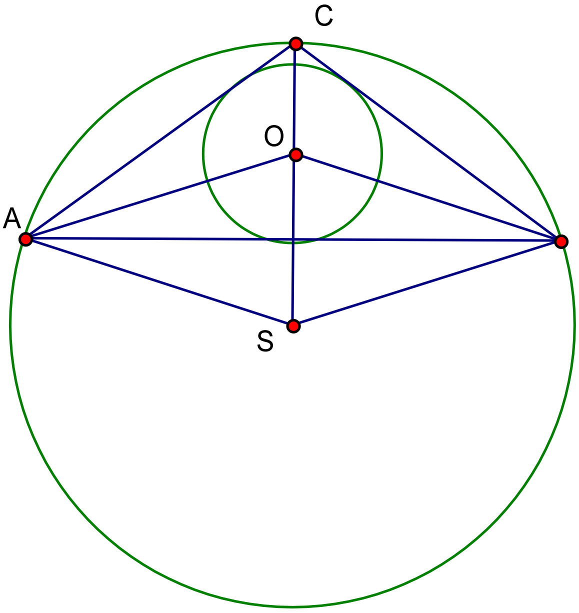
Уочавамо периодичност остатака и закључујемо да је остатак дељења 3^{1000} са 13 једнак 3. Сличан поступак налажења периодичности остатка може се применити и на случај степена 4^{1000}. Алтернативно се тражени остатак може одредити и на следећи начин. Уочимо да је $4^3 = 64 = 5 \cdot 13 - 1$. Одавде закључујемо да је

$$4^{999} = (4^3)^{333} = (5 \cdot 13 - 1)(5 \cdot 13 - 1) \cdot \ldots \cdot (5 \cdot 13 - 1) = 13 \cdot k - 1$$

за неки природан број k. Према томе остатак дељења броја 4^{1000} са 13 је 9. Коначан закључак је да је тражени остатак дељења броја $3^{1000} + 4^{1000}$ са 13 број 12.

(Други део задатка) Сличним расуђивањем као и у првом делу задатка налазимо да је остатак дељења броја $9^{222} = (10-1)^{222}$ са 5 једнак 1 као и да је остатак дељења броја $4^{333} = 4 \cdot 4^{332} = 4 \cdot (15+1)^{166}$ са 5 једнак 4. Одавде налазимо да је број $9^{222} + 4^{333}$ дељив са 5, тј. тражени остатак је 0.

2. Центар уписаног круга и центар описаног круга троугла ABC симетрични су у односу на страницу AB. Израчунати унутрашње углове троугла ABC.



Решење: Нека је O центар уписаног круга, а S описаног круга. Права OS је симетрала дужи AB па је $OA = OB$, одакле следи да је $\alpha/2 = \beta/2$, односно $\alpha = \beta$. Следи да је ΔABC једнакокрак, па теме C припада правој SC. Како је $SA = SC$ (полупречник описаног круга) и $SB = SC$ то је $\sphericalangle OAC = \sphericalangle OBC$. Одавде следи да је $3\alpha/2 = \gamma/2$, односно $\alpha = \beta = \gamma/3$, одакле се лако налази да је $\gamma = 108°$, $\alpha = \beta = 36°$.

3. У зависности од реалног параметра a, одредити број различитих реалних решења једначине

$$|x^2 + x + a| = x.$$

Решење: Дата једначина еквивалентна је дисјункцији (I) $\vee$ (II), где су (I) и (II) следећи системи једначина и неједначина:

$$\text{(I)}: \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x^2 + x + a = x \end{cases} \qquad \text{(II)}: \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x^2 + x + a = -x \end{cases}$$

Из друге једначине система (I) добијамо да је $x^2 = -a$. Због тога (I) за $a > 0$ нема решења, док за $a \leqslant 0$ има јединствено решење.

Решимо сада систем (II). Ако је $ax^2 + bx + c = 0$ квадратна једначина $(a, b, c \in \mathbb{R})$, користећи Виетове формуле, лако закључујемо да је у случају $\frac{c}{a} < 0$ тачно једно њено решење позитивно, док су у случају $\frac{c}{a} > 0$ оба решења истог знака или су пак конјуговано комплексни бројеви. Примењујући овај закључак на другу једначину система (II), $x^2 + 2x + a = 0$, закључујемо да он за $a < 0$ има тачно једно позитивно решење, док за $a > 0$ нема позитивних решења (ако су решења реална, онда су истог знака, али им је збир једнак -2, те су оба негативна). За $a = 0$, решење система (II) је $x = 0$.

Из друге једначине система (I) и друге једначине система (II) закључујемо да је једини реалан број који би могао да буде заједничко решење наведених система $x = 0$. Он заиста и јесте заједничко решење само у случају $a = 0$.

Коначно, овим смо доказали да дата једначина има два решења за $a < 0$, једно решење за $a = 0$, док у случају $a > 0$ нема решења.

4. Решити неједначину $\sqrt{4x - x^2 - 3} \geqslant \sqrt{x^2 - 7x + 12} - \sqrt{x^2 - 5x + 6}$.

Решење: Област дефинисаности израза је $[1,2] \cup \{3\}$. Неједнакост се може написати у облику $\sqrt{(x-1)(3-x)} + \sqrt{(2-x)(3-x)} \geqslant \sqrt{(3-x)(4-x)}$. Број 3 је, очигледно, решење. За $x < 3$ неједнакост се може "скратити" са $\sqrt{3-x}$ и добија се

$$\begin{aligned} & \sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} \geqslant \sqrt{4-x} \\ \Leftrightarrow\ & 2\sqrt{(x-1)(2-x)} \geqslant 3 - x \\ \Leftrightarrow\ & 5x^2 - 18x + 17 \leqslant 0. \end{aligned}$$

У овом случају нема решења. Дакле, једино решење је $x = 3$.

5. Одредити све реалне бројеве x и y за које важи једнакост

$$x^2 - 2x\cos(xy) + 1 = 0.$$

Тангента 40, M474

Решење: Наведена једначина је еквивалентна са

$$x^2 - 2x\cos(xy) + \cos^2(xy) + \sin^2(xy) = (x - \cos(xy))^2 + \sin^2(xy) = 0$$

што је еквивалентно систему једначина

$$x - \cos(xy) = 0 \qquad \sin(xy) = 0.$$

Ако је $\sin(xy) = 0$ онда је $\cos(xy) = \pm 1$ тј. или је $x = 1$ или $x = -1$. У првом случају ($x = +1$) из услова $\cos y = 1$ добијамо $y = 2k\pi$ за неки цео број k. У другом случају ($x = -1$) из услова $\cos(-y) = -1$ добијамо $y = (2m+1)\pi$ за неки цео број m. Закључујемо да је (x, y) решење полазне једначине ако и само ако је

$$(x, y) \in \{(+1, 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(-1, (2m+1)\pi) \mid m \in \mathbb{Z}\}.$$

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

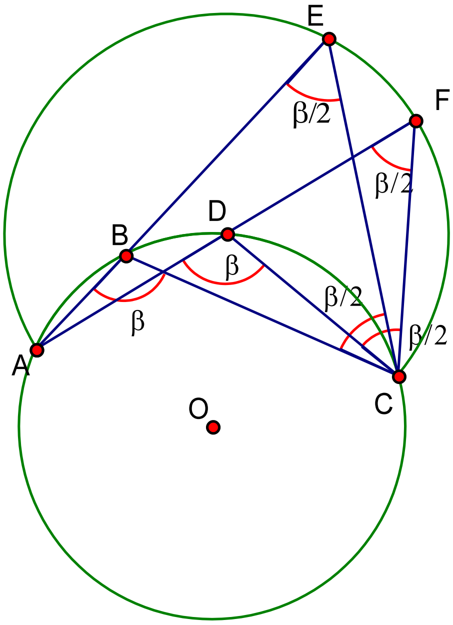
ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.02.2007.

Трећи разред – Б категорија

1. Нека је AC тетива кружнице полупречника R којој одговара централни угао ϕ. На кружном луку који одговара овој тетиви (унутар угла ϕ) одредити тачку B тако да збир дужина тетива AB и BC буде максималан. Колики је тај збир?

Решење 1: Нека је $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ACB = \gamma$ и $\sphericalangle ABC = \beta$. По синусној теореми $AB+BC = 2R(\sin\alpha+\sin\gamma) = 4R\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2})\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}$. Максимум овог израза се постиже за $\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} = 1$, тј. $\alpha = \gamma = \frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2}$. Дакле, $AB = BC = 2R\sin\frac{\alpha}{2} = 2R\cos\frac{\beta}{2}$, а максималан збир износи $4R\cos\frac{\beta}{2}$.



Решење 2: Продужимо дуж AB до тачке E тако да важи $BE = BC$, односно $AE = AB+BC$. Троугао BCE је једнакокрак, а како је $\sphericalangle ABC = \beta$ спољашњи за овај троугао следи да је $\sphericalangle BEC = \sphericalangle ECB = \frac{\beta}{2}$. Конструишимо тачку D на задатој кружници тако да је $AD = DC$ и $\sphericalangle ADC = \beta$. Поновимо поступак за тачку D као и за тачку B. Конструишимо тачку F тако да важи $DC = DF$, односно $AF = AD + DC$. На исти начин важи да је $\sphericalangle DFC = \sphericalangle FCD = \frac{\beta}{2}$. Тачке E и F припадају геометријском месту тачака из којих се дуж AC види под углом $\frac{\beta}{2}$ (али са исте стране праве AC са које су B и D). Геометријско место тачака је лук са центром у тачки D. Пошто је пречник најдужа тетива, онда

следи да је максималан збир тетива у случају тачке D односно када је $AB = BC$.

2. За које вредности реалног параметра p једначина

$$\frac{\log px}{\log(x+1)} = 2$$

има јединствено решење?

Решење: Једначина је еквивалентна са

$$px > 0, \quad x > -1, \quad x + 1 \neq 1, \quad px = (x+1)^2,$$

тј. са

$$px > 0, \quad x > -1, \quad x^2 + (2-p)x + 1 = 0. \qquad (*)$$

Имамо два случаја:
Први случај: Квадратна једначина има јединствени корен тј. $(2-p)^2 = 4$, одакле је $p = 0$ или $p = 4$. Решење $p = 0$ не задовољава први услов, а за $p = 4$ имамо јединствено решење $x = 1$.
Други случај: Квадратна једначина има два корена x_1, x_2, од којих само један задовољава услове (*). Из услова да је дискриминанта квадратне једначине $D = (2-p)^2 - 4$ већа од нуле, добијамо $p > 4$ или $p < 0$. Решавањем квадратне једначине добијамо решења $x_{1,2} = \frac{1}{2}(p - 2 \pm \sqrt{(p-2)^2 - 4})$. Када је $p > 4$, имамо да су оба решења позитивна, па оба задовољавају услове (*) и тада немамо јединствено решење. Када је $p < 0$ имамо да су оба решења негативна, међутим како је $f(-1) = p < 0$, где је $f(x) = x^2 + (2-p)x + 1$, имамо да је -1 између корена једначине, тј. само једно решење задовољава други услов (*), па у том случају полазна једначина има једнииствено решење.

Дакле решење је $p \in (-\infty, 0) \cup \{4\}$.

3. Нека је $AB = 6\sqrt{2}$ ивица квадратне основе правилне пирамиде $ABCDV$ и $TV = 3$ њена висина, где је T пресек дијагонала квадрата $ABCD$. Израчунати угао између праве ℓ одређене са дужи TH и равни α троугла ABV, где је H ортоцентар троугла ABV.

Решење 1: Ако је S средина странице AB, тада редом имамо да је $AS = 3\sqrt{2}$, $AV = 3\sqrt{5}$, $VS = 3\sqrt{3}$ и из сличности троуглова HSA и ASV следи $\frac{HS}{AS} = \frac{AS}{VS}$ тј. $HS = 2\sqrt{3}$ и $HV = SV - HS = \sqrt{3}$. Како је угао $\sphericalangle TVS$ заједнички за троуглове STV и THV и како је $\sqrt{3} = \frac{SV}{TV} = \frac{TV}{HV} = \sqrt{3}$ следи да су троуглови STV и THV слични, па је тражени угао $\sphericalangle THV = \sphericalangle STV = \frac{\pi}{2}$.

Решење 2: Поставимо дату пирамиду у координатни систем тако да је на пример $A(6,0,0), B(0,6,0), V(0,0,3)$ и $T(0,0,0)$. Како је $AH \perp BV$ и $AC \perp BV$ то је раван $\beta = \beta(A, C, H) \perp BV$. Аналогно је и $\gamma = \gamma(B, D, H) \perp AV$. Према томе ортоцентар H мора припадати свакој од равни α, β и γ тј. $H \in \alpha \cap \beta \cap \gamma$. Како је $\alpha : x + y + 2z = 6$, $\beta : -2y + z = 0$ и $\gamma : -2x + z = 0$, то решење овог система једначина представља координате отоцентра H, па је $H(1, 1, 2)$. Сада имамо да скаларни производ вектора $\overrightarrow{TH}$ и $\overrightarrow{SV}$ је $\overrightarrow{TH} \cdot \overrightarrow{SV} = (1, 1, 2)(-3, -3, 3) = 0$, што значи да је $\overrightarrow{TH} \perp \overrightarrow{SV}$ тј. $\ell \perp \alpha$, па је тражени угао $\frac{\pi}{2}$.

Решење 3: За **сваку** праву правилну четворострану пирамиду важи да је тражени угао $\frac{\pi}{2}$. Како је $AC \perp BV$ то постоји раван β која садржи AC и нормална је на BV и њој очевидно припада висина троугла ABV која полази из темена A. Како је $AC \perp BV$ то постоји раван β која садржи BD и нормална је на AV и њој очевидно припада висина троугла ABV која полази из темена B. Према томе ортоцентар H троугла ABV припада пресеку равни α и β. Како су обе равни α и β нормалне на раван троугла ABV тј. на раван α, то је и њихова пресечница нормална на α, а њој очевидно припада ортоцентар H па је тражени угао $\frac{\pi}{2}$.

4. Решити систем једначина

$$a_1 + b_1 = 23 \quad a_1 + d + b_1 q = 21 \quad a_1 + 2d + b_1 q^2 = 22 \quad a_1 + 3d + b_1 q^3 = 29.$$

где су a_1, b_1, d и q непознати реални бројеви.

Тангента 38, стр. 42

Решење: Одузимањем прве од друге, друге од треће и треће од четврте једначине, добијамо еквивалетни систем

$$a_1 + b_1 = 23 \quad d + b_1(q-1) = -2 \quad d + b_1 q(q-1) = 1 \quad d + b_1 q^2(q-1) = 7.$$

Одузимањем друге од треће и треће од четврте једначине, добијамо еквивалетни систем

$$a_1 + b_1 = 23 \quad d + b_1(q-1) = -2 \quad b_1(q-1)^2 = 3 \quad b_1 q(q-1)^2 = 6.$$

Пошто су вредности $b_1 = 0$ и $q = 1$ искључене, дељењем четврте са трећом једначином коначно добијамо еквивалентан систем

$$a_1 + b_1 = 23 \quad d + b_1(q-1) = -2 \quad b_1(q-1)^2 = 3 \quad q = 2.$$

Решење последњег а тиме и нашег система је

$$q = 2 \quad b_1 = 3 \quad d = -5 \quad a_1 = 20.$$

5. Решити неједначину

$$\frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x - 1} > 0.$$

Тангента 38, стр. 43

Решење: Из адиционе теореме за синус налазимо да је

$$\sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2}\sin(2x - \frac{\pi}{4}) \quad \text{и} \quad \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}\sin(2x + \frac{\pi}{4}).$$

Разломак је позитиван ако и само ако су му и бројилац и именилац истог знака.

Први случај:

$$\sin(2x - \frac{\pi}{4}) > -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{и} \quad \sin(2x + \frac{\pi}{4}) > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Прва једначина је еквивалетна са

$$k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k\pi \, (k \in \mathbb{Z})$$

а друга са

$$m\pi < x < \frac{\pi}{4} + m\pi \, (m \in \mathbb{Z}).$$

Оба услова су задовољена ако и само ако је $x \in (k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi)$ за неки $k \in \mathbb{Z}$.

Други случај:

$$\sin(2x - \frac{\pi}{4}) < -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{и} \quad \sin(2x + \frac{\pi}{4}) < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Прва једначина је еквивалетна са

$$\frac{3\pi}{4} + k\pi < x < \pi + k\pi \, (k \in \mathbb{Z})$$

а друга са

$$\frac{\pi}{4} + m\pi < x < \pi + m\pi \, (m \in \mathbb{Z}).$$

Оба услова су задовољена ако и само ако је $x \in (\frac{3\pi}{4} + k\pi, \pi + k\pi)$ за неки $k \in \mathbb{Z}$ или што је еквивалетно ако и само ако је $x \in (-\frac{\pi}{4} + k\pi, k\pi)$ за неки $k \in \mathbb{Z}$.

Решење:

$$x \in (k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi) \cup (-\frac{\pi}{4} + k\pi, k\pi) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

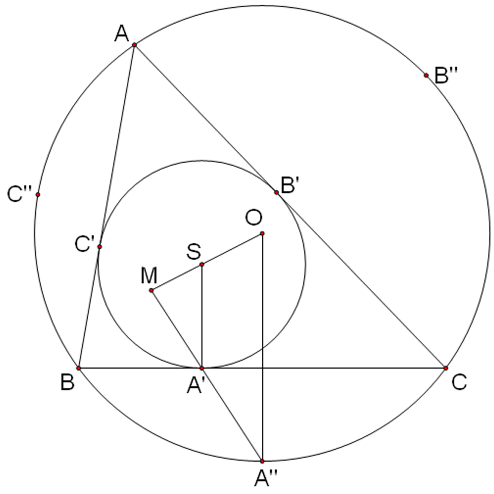
ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.02.2007.

Четврти разред – Б категорија

1. Уписани круг у троугао ABC додирује стране BC, AC, AB троугла у тачкама A', B', C'. На описаном кругу троугла ABC означимо са A'' средиште лука BC који не садржи тачку A, са B'' средиште лука AC који не садржи тачку B, са C'' средиште лука AB који не садржи тачку C. Доказати да се праве $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ секу у једној тачки.

Решење: Означимо са O и S центре описаног и уписаног круга и са R и r полупречнике ових кругова. Ако је троугао ABC једнакостраничан, праве $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ пролазе кроз центар O троугла, па је тврђење испуњено. У супротном, тачке O и S се не поклапају. Означимо $M = A'A'' \cap OS$.



Како су дужи SA' и OA'' нормалне на страницу BC, оне су међусобно паралелне. Према Талесовој теореми је

$$(1) \qquad \frac{MS}{MO} = \frac{SA'}{OA''} = \frac{r}{R}.$$

Такође, тачке A' и A'' су са исте стране праве OS, па се тачка M налази ван дужи OS. Аналогно се доказује да праве $B'B''$ и $C'C''$ секу праву OS у тачки за коју важи (**??**) и која се налази ван дужи OS. Како је тачка M са ова два услова једнозначно одређена, закључујемо да праве $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ све садрже тачку M.

2. а) Ако су $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функције дефинисане са $f(x) =$

$\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ и $g(x) = \operatorname{arctg} x$, тада ако за сваки реални број x важи $\alpha\arcsin\frac{2x}{1+x^2} + \beta\operatorname{arctg} x = 0$, онда је $\alpha = \beta = 0$. Доказати.
б) Да ли важи претходно тврђење ако су $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ и $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ функције дефинисане са $f(x) = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ и $g(x) = \operatorname{arctg} x$?

Решење: а) Како $\alpha\arcsin\frac{2x}{1+x^2} + \beta\operatorname{arctg} x = 0$ мора да важи за сваки реакни број x то за $x = 1$ добијамо $2\alpha + \beta = 0$, док за $x = \sqrt{3}$ добијамо $\alpha + \beta = 0$, а тај систем једначина еквивалентан је са $\alpha = \beta = 0$.

б) Не важи.

Како $\alpha\arcsin\frac{2x}{1+x^2} + \beta\operatorname{arctg} x = 0$ мора да важи за сваки реалан број x из интервала $[-1,1]$, то за $x = 1$ следи $\alpha\frac{\pi}{2} + \beta\frac{\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow 2\alpha + \beta = 0$. Докажимо да за свако $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ следи $2\alpha + \beta = 0$ тј. доказаћемо да $(\forall x \in [-1,1])$ $\arcsin\frac{2x}{1+x^2} = 2\operatorname{arctg} x$

Доказ: Пре свега и лева и десна страна једнакости коју доказујемо су дефинисане за свако $x \in \mathbb{R}$, јер домен функције arctg је $\mathbb{R}$, док због $\Big(-1 \le \frac{2x}{1+x^2} \le 1\Big) \Leftrightarrow \Big((x+1)^2 \ge 0 \wedge (x-1)^2 \ge 0\Big)$ следи да је и $\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ дефинисано за свако $x \in \mathbb{R}$, јер домен функције arcsin је $[-1,1]$.

Сада применимо теорему

$$\Big(a \in \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big] \ \wedge\ b \in \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big] \ \wedge\ \sin a = \sin b\Big) \Rightarrow a = b$$

тако што узмемо $a = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ и $b = 2\operatorname{arctg} x$. Прво треба показати да за свако $x \in [-1,1]$ важи

$$a = \arcsin\frac{2x}{1+x^2} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \ \text{ и } \ b = 2\operatorname{arctg} x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Прва тврдња следи из саме дефиниције функције $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, док друга следи из
$x \in [-1,1] \Rightarrow \operatorname{arctg} x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \Rightarrow 2\operatorname{arctg} x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Сада је преостало још само да се докаже да је $\sin a = \sin b$ тј. да је $\sin(\arcsin\frac{2x}{1+x^2}) = \sin(2\operatorname{arctg} x)$. Лева страна ове једнакасти је очито једнака $\frac{2x}{1+x^2}$, па покажимо да је и десна страна те једнакости једнака $\frac{2x}{1+x^2}$. Значи имамо да је $\sin(2\operatorname{arctg} x) = 2\sin(\operatorname{arctg} x)\cos(\operatorname{arctg} x) = 2\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2x}{1+x^2}$.

Задатак се много једноставно решава помоћу извода! Треба само показати да $(\forall x \in [-1,1])$ $f'(x) = (2g(x))' = \frac{2}{1+x^2}$ и да је $f(x) = 2g(x)$ за неко x, например за $x = 1$ је $f(1) = 2g(1) = \frac{\pi}{2}$, одакле следи да је $(\forall x \in [-1,1])$ $\arcsin\frac{2x}{1+x^2} = 2\operatorname{arctg} x$.

3. Решити неједначину

$$\frac{\log_{21+4x-x^2}(7-x)}{\log_{x+3}(21+4x-x^2)} < \frac{1}{4}.$$

Решење: Одредимо најпре за које вредности x дата неједначина има смисла (домен). Потребни и довољни услови за то су: (I) $7-$

$x > 0$, (II) $21 + 4x - x^2 > 0$, (III) $21 + 4x - x^2 \neq 1$, (IV) $x + 3 > 0$, (V) $x+3 \neq 1$ и (VI) $\log_{x+3}(21+4x-x^2) \neq 0$ (услов (III) имплицира услов (VI)). Њиховим решавањем добијамо (I) $7 > x$, (II) $7 > x > -3$, (III) $x \neq 2 \pm 2\sqrt{6}$, (IV) $x > -3$, (V) $x \neq -2$. Одавде добијамо да је домен

$$D = (-3, 2 - 2\sqrt{6}) \cup (2 - 2\sqrt{6}, -2) \cup (-2, 2 + 2\sqrt{6}) \cup (2 + 2\sqrt{6}, 7).$$

За свако $x \in D\backslash\{6\}$ важи $\log_{21+4x-x^2}(7-x) = \frac{1}{\log_{7-x}(21+4x-x^2)}$, те је полазна неједначина на скупу $D\backslash\{6\}$ еквивалентна редом са неједначинама

$$\frac{1}{\log_{7-x}(21+4x-x^2)\cdot\log_{x+3}(21+4x-x^2)} < \frac{1}{4} \iff$$

$$\frac{1}{(\log_{7-x}(7-x)(x+3))\cdot(\log_{x+3}(x+3)(7-x))} < \frac{1}{4} \iff$$

$$\frac{1}{(1+\log_{7-x}(x+3))\cdot(1+\log_{x+3}(7-x))} < \frac{1}{4} \iff$$

$$\frac{1}{(1+\frac{1}{\log_{x+3}(7-x)})\cdot(1+\log_{x+3}(7-x))} < \frac{1}{4} \iff$$

$$\frac{\log_{x+3}(7-x)}{(1+\log_{x+3}(7-x))^2} < \frac{1}{4} \iff$$

$$0 < \frac{(1-\log_{x+3}(7-x))^2}{4(1+\log_{x+3}(7-x))^2} \iff 1 \neq \log_{x+3}(7-x) \iff x \neq 2.$$

Специјално, лако проверавамо да $x = 6$ јесте решење полазне неједначине. Овим је доказано да је скуп решења баш $D\backslash\{2\}$.

4. Доказати да у сваком тетраедру постоји теме такво да се од ивица које из њега полазе може конструисати троугао.

Тангента 34, M335

Решење: Нека је $ABCD$ произвољан тетраедар. Уочимо најдужу ивицу, нека је то на пример AB. Доказаћемо да се бар од једне од тројки ивица (AB, AC, AD) или (BA, BC, BD) може конструисати троугао. Како је AB најдужа ивица, важи

$$AB \geqslant AC,\ AB \geqslant AD,\ BA \geqslant BC,\ BA \geqslant BD,$$

па је довољно доказати да важи бар једна од неједнакости

$$AC + AD > AB,\ \ BC + BD > BA.$$

Из троугла ABC имамо да важи $AC + BC > AB$, а из троугла ABD имамо да важи $AD + BD > AB$. Сабирањем ове две неједнакости добијамо

$$(AC + AD) + (BC + BD) > 2AB,$$

одакле закључујемо да је $AC + AD > AB$ или $BC + BD > BA$, што је и требало показати.

5. Одредити чланове a_1, a_2, a_3, a_4 аритметичког и b_1, b_2, b_3, b_4 геометријског низа ако је

$$a_1 + b_1 = 23 \quad a_2 + b_2 = 21 \quad a_3 + b_3 = 22 \quad a_4 + b_4 = 29.$$

Тангента 38, стр. 42

Решење: Ако је d разлика наведеног аритметичког низа а q количник датог геометријског низа, горњи систем једначина је еквивалентан са

$$a_1{+}b_1 = 23 \quad a_1{+}d{+}b_1 q = 21 \quad a_1{+}2d{+}b_1 q^2 = 22 \quad a_1{+}3d{+}b_1 q^3 = 29.$$

Одузимањем прве од друге, друге од треће и треће од четврте једначине, добијамо еквивалетни систем

$$a_1{+}b_1 = 23 \quad d{+}b_1(q{-}1) = -2 \quad d{+}b_1 q(q{-}1) = 1 \quad d{+}b_1 q^2(q{-}1) = 7.$$

Одузимањем друге од треће и треће од четврте једначине, добијамо еквивалетни систем

$$a_1 + b_1 = 23 \quad d + b_1(q-1) = -2 \quad b_1(q-1)^2 = 3 \quad b_1 q(q-1)^2 = 6.$$

Пошто су вредности $b_1 = 0$ и $q = 1$ искључене, дељењем четврте са трећом једначином коначно добијамо еквивалентан систем

$$a_1 + b_1 = 23 \quad d + b_1(q-1) = -2 \quad b_1(q-1)^2 = 3 \quad q = 2.$$

Решење последњег система је

$$q = 2 \quad b_1 = 3 \quad d = -5 \quad a_1 = 20$$

одакле се добија да су тражени низови

$$a_1 = 20, a_2 = 15, a_3 = 10, a_4 = 5 \qquad b_1 = 3, b_2 = 6, b_3 = 12, b_4 = 24.$$