РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 28.02.2009.

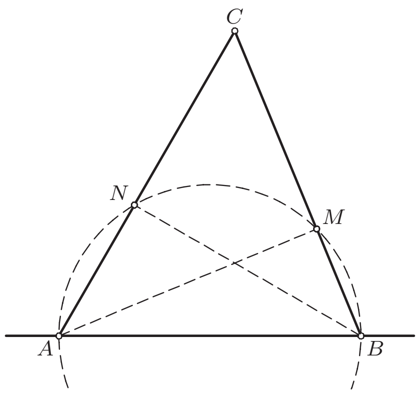
Први разред, А категорија

1. *Анализа.* Како је $\sphericalangle BMA = \sphericalangle BNA = 90^\circ$, следи да кружница над AB као пречником садржи M и N.

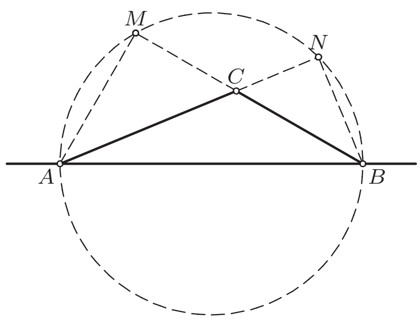
Конструкција. Ако су M и N симетричне у односу на p, нека је X произвољна тачка која припада p, а не припада MN. Нека су A и B пресечне тачке праве p и кружнице са центром у X која садржи M. Тачка C је пресечна тачка правих AN и BM (слика ОК 09 1А 1-4).

Ако MN није нормално на p, нека је X пресек симетрале дужи MN и праве p. Тачке A и B су пресечне тачке праве p и кружнице са центром у X која садржи M. Тачка C је пресечна тачка правих AN и BM (слике ОК 09 1А 1-(1-3)).

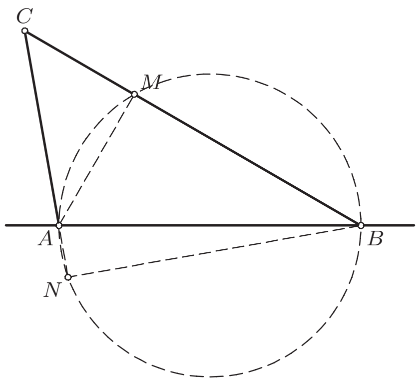
Доказ. По конструкцији тачке M и N припадају правама BC и AC, редом, а права AB се поклапа са p. Како је $\sphericalangle BMA = \sphericalangle BNA = 90^\circ$ (угао над пречником), следи да су M и N подножја нормала из A и B на BC и AC, редом.



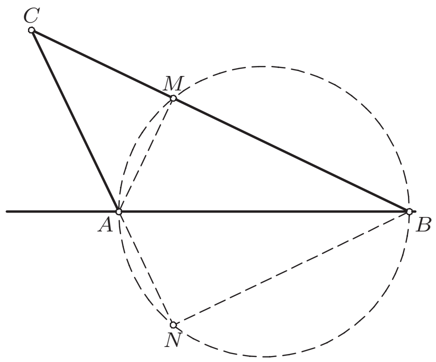
ОК 09 1А 1-1



ОК 09 1А 1-2



ОК 09 1А 1-3



ОК 09 1А 1-4

Дискусија. Средиште дужи MN не сме припадати p. У том случају би четвороугао $AMNB$ био паралелограм (дијагонале му се полове), тј. две странице $\triangle ABC$ би биле паралелне.

Ако је $MN \perp p$ и M и N нису симетричне у односу на p, тражени троугао не постоји (не постоје $A, B \in p$ тако да је $\sphericalangle BMA = \sphericalangle BNA = 90^\circ$). Ако је $MN \perp p$ и M и N су симетричне у односу на p, конструкција је могућа за било које $X \in p$, тако да $X \notin MN$ ($X \in MN$ је немогуће по горњем коментару). Дакле, у овом случају постоји бесконачно много решења.

Ако није $MN \perp p$ и средиште дужи MN не припада p (иначе нема решења по горњем коментару), конструкција је коректно дефинисана. Тада постоји два решења задатка (кружница са центром у X која садржи M сече p у две тачке; обе могу бити тачка A (преостала је тачка B)) (Тангента 51, стр. 50, Писмени задаци, задатак 1).

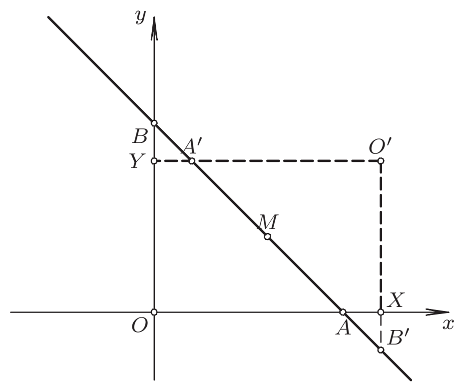
2. Из $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=0$ следи да је $pq+qr+rp=0$, па је $1=(p+q+r)^2=(p^2+q^2+r^2)+2(pq+qr+rp)$, одакле је $p^2+q^2+r^2=1$. Следи $(pa+qb+rc)^2+(qa+rb+pc)^2+(ra+pb+qc)^2=$

$$\begin{aligned} &= (p^2+q^2+r^2)(a^2+b^2+c^2)+2(pq+rq+pr)(ab+bc+ac) \\ &= 1\cdot(a^2+b^2+c^2)+0=a^2+b^2+c^2. \end{aligned}$$

3. Нека је M произвољна тачка првог квадранта, m права која садржи M и сече позитивне делове координатних оса у тачкама A (x-осу) и B (y-осу). Нека су O', A', B' тачке симетричне у односу на M са O, A, B, редом.

Следи $\triangle OAB \cong \triangle O'A'B'$. Нека су X и Y подножја нормала из O' на x и y осу, редом. Унија површи троуглова OAB и $O'A'B'$ садржи правогаоник $OXO'Y$, па је $2P(OAB) = P(OAB)+P(O'A'B') \geqslant P(OXO'Y)$; једнакост се достиже ако и само ако је $A\equiv X\equiv B'$ и $B\equiv Y\equiv A'$.

Дакле, тражена права је дијагонала XY ($M\in XY$) правоугаоника $OXO'Y$.



ОК 09 1А 3

4. Један такав број је $n=1$. Нека је $n>1$ неки број за који је тражено тврђење тачно, $S(k)$ збир цифара природног броја k и $x=\underbrace{11\ldots11}_{n}$, $y=\underbrace{11\ldots11}_{n-2}02$. Како је $S(x)=S(y)=n$ следи да $n\mid x$ (јер $n\mid S(x)$) и $n\mid y$ (јер $n\mid S(y)$), па $n\mid x-y=9$. Отуда су једини бројеви који могу бити решења $n=3$ и $n=9$. Из критеријума за дељивост са 3 и 9 следи да је тврђење тачно за ове бројеве.

Дакле, тражени бројеви су 1, 3 и 9.

5. Један тим не може имати истовремено две карактеристичне боје, јер одевних предмета у преосталој боји има 8, што је мање од $2\cdot 6$ (тј. играчи другог тима не би могли да се обуку).

Дакле, играчи једног тима морају носити свих 8 одевних предмета у својој карактеристичној боји, а њихова преостала 4 одевна предмета морају бити на четири различита играча, и то у боји која није карактеристична за други тим. То је изводљиво само ако у тиму два фудбалера имају и мајицу и шортс у карактеристичној боји, два само мајицу, а два само шортс.

Карактеристичне боје тимовима се могу доделити на $3\cdot 2=6$ начина; играчи једног тима могу да се обуку на $\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}=90$ начина, и то независно од облачења другог тима. Дакле, укупан број различитих облачења је $6\cdot 90^2=48\,600$.

Први разред, Б категорија

1. Како је $\sqrt{a^2}=|a|$, $\sqrt{7}-1>0$ и $2\sqrt{7}-6<0$, следи

$$\begin{aligned} 2\sqrt{8-2\sqrt{7}}+\sqrt{\left(2\sqrt{7}-6\right)^2} &= 2\sqrt{1-2\sqrt{7}+\left(\sqrt{7}\right)^2}+\sqrt{\left(2\sqrt{7}-6\right)^2} \\ &= 2\sqrt{\left(\sqrt{7}-1\right)^2}+\sqrt{\left(2\sqrt{7}-6\right)^2} \\ &= 2\cdot\left|\sqrt{7}-1\right|+\left|2\sqrt{7}-6\right| = 2\cdot\left(\sqrt{7}-1\right)+\left(6-2\sqrt{7}\right)=4, \end{aligned}$$

тј. овај број је рационалан (Тангента 54, стр. 46, Писмени задаци, задатак 5).

2. По неједнакости троугла је $BC>AB+AC$, одакле је $C-E-D-B$.

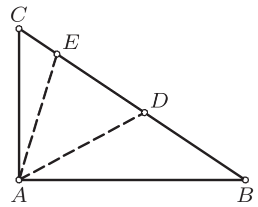
$\triangle ABE$ је једнакокрак, па је

$$\sphericalangle DEA = \sphericalangle BEA = 90^\circ - \frac{\sphericalangle ABC}{2}\,.$$

$\triangle ADC$ је једнакокрак, па је

$$\sphericalangle ADE = \sphericalangle ADC = 90^\circ - \frac{\sphericalangle BCA}{2}\,.$$

Коначно, из $\triangle ADE$ следи



ОК 09 1Б 2

$$\sphericalangle DAE = 180^\circ - \sphericalangle DEA - \sphericalangle ADE = \frac{\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA}{2} = 45^\circ.$$

3. Једначина $|x| = a$ има два решења ако је $a > 0$, једно ако је $a = 0$, а нема решења ако је $a < 0$. Следи, ако је $|y| > 2\,009$ једначина нема решења; ако је $|y| = 2\,009$, постоји тачно једно (и то цело) x које је решење једначине; ако је $|y| < 2\,009$, $y \in \mathbb{Z}$, постоји тачно два (и то цела) x која су решења једначине.

Дакле, укупан број решења ове једначине (у $\mathbb{Z}^2$) је $1 \cdot 2 + 2 \cdot (2 \cdot 2\,008 + 1) = 8\,036$.

4. Из формуле за површину троугла је $P = \frac{1}{2} \cdot ch = \frac{1}{2} \cdot (a+b+c)r$, а по неједнакости троугла $a + b > c$, па је

$$\frac{r}{h} = \frac{c}{a+b+c} < \frac{c}{c+c} = \frac{1}{2}\,.$$

Како је $c^2 = a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, следи $2c^2 \geqslant (a+b)^2$, тј. $a + b \leqslant c\sqrt{2}$, па је

$$\frac{r}{h} = \frac{c}{a+b+c} \geqslant \frac{c}{c\left(1+\sqrt{2}\right)} = \sqrt{2} - 1 > \frac{2}{5}\,.$$

5. Тражени број је једнак броју избора 10 карата (од 20), међу којима су тачно 3 даме. Седам карата од 16 (које нису даме) могу се изабрати на $\binom{16}{7}$ начина, а 3 (од 4) даме на $\binom{4}{3}$ начина (независно од претходног избора), па је тражени број $\binom{16}{7} \cdot \binom{4}{3} = 45\,760$ (Тангента 52, стр. 38, Писмени задаци, задатак 9).

Други разред, А категорија

1. Једначина има смисла за $x \geqslant 0$.

Како је $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$, следи $\sqrt[3]{2+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{x}} = 1$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad 2 + \sqrt{x} + 2 - \sqrt{x} + 3 \cdot \sqrt[3]{(2+\sqrt{x})(2-\sqrt{x})} \cdot \left(\sqrt[3]{2+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{x}}\right) = 1 \\
&\Rightarrow \quad 4 + 3 \cdot \sqrt[3]{(2+\sqrt{x})(2-\sqrt{x})} \cdot 1 = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt[3]{4-x} \cdot 1 = -1 \Leftrightarrow x = 5.
\end{aligned}$$

Провером се добија да $x = 5$ и јесте решење (Тангента 54, стр. 46, Писмени задаци, задатак 4).

Напомена. Провера решења је неопходна да би решење било потпуно. Заиста, применом истог поступка на једначину $\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} = -1$ долази се до могућег решења $x = 0$. Међутим, ово није решење полазне једначине.

2. Једначина $\sin\varphi = a$ има решења ако и само ако је $a \in [-1, 1]$, па је довољно доказати да је $\dfrac{\sin\beta\sin\gamma}{n - \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} \in [-1, 1]$. Како за $x \in (0, \pi)$ важи $|\cos x| < 1$, следи $|\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma| = |\cos\alpha| \cdot |\cos\beta| \cdot |\cos\gamma| < 1$, одакле је $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma < 1 \leqslant n$, па је именилац посматраног разломка позитиван. Следи да је тврђење еквивалентно са

$$\pm\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leqslant n. \qquad (\star)$$

Како је $\pm\sin\beta\sin\gamma \leqslant \frac{1}{2}\cdot\left(\sin^2\beta+\sin^2\gamma\right)$ (пошто је $0\leqslant(\sin\beta\mp\sin\gamma)^2$) и

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leqslant |\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma| = |\cos\alpha|\cdot|\cos\beta\cos\gamma| < 1\cdot|\cos\beta\cos\gamma| \leqslant \frac{1}{2}\cdot\left(\cos^2\beta+\cos^2\gamma\right),$$

следи

$$\pm\sin\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leqslant \frac{1}{2}\left(\sin^2\beta+\sin^2\gamma\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\cos^2\beta+\cos^2\gamma\right)=1\leqslant n,$$

тј. $(\star)$.

Ако је n цео број, аналогно тврђење не важи. Заиста, за $n=0$, $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{4}$, вредност израза $\frac{\sin\beta\sin\gamma}{n-\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$ једнака је $-\sqrt{2}$, па не постоји тражено φ.

Напомена. Слично претходном решењу, може се доказати да за сваки негативан цео број n тврђење важи, тј. једина вредност целог броја n за коју тврђење није тачно је $n=0$.

3. *Лема. Од свих троуглова уписаних у круг полупречника R, највећу површину има једнакостранични троугао.*

Доказ. Темена троугла највеће површине припадају кружници. Од свих троуглова уписаних у круг којима је једна страница фиксна тетива тог круга, највећу површину има једнакокраки троугао чија је основица та тетива, а угао при врху није туп (јер има највећу висину).

Дакле, довољно је да посматрати једнакокраке троуглове уписане у тај круг. Уколико је основица дужине x ($0<x\leqslant 2R$), одговарајућа висина је $R+\sqrt{R^2-\frac{x^2}{4}}$, а површина $P=\frac{1}{2}\cdot\left(Rx+x\cdot\sqrt{R^2-\frac{x^2}{4}}\right)$.

На основу неједнакости између аритметичке и квадратне средине је

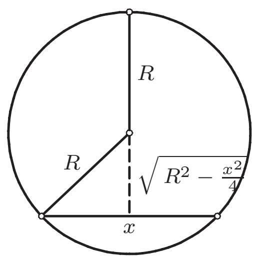
$$\begin{aligned} 2P &= Rx+x\cdot\sqrt{R^2-\frac{x^2}{4}}=\frac{Rx}{2}+\frac{Rx}{2}+x\cdot\sqrt{R^2-\frac{x^2}{4}} \\ &\leqslant \sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2\cdot\frac{R^2x^2}{4}+x^2\cdot\left(R^2-\frac{x^2}{4}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt[3]{6R^2x^2-x^4}. \end{aligned}$$

Квадратна функција $t\to 6R^2t-t^2$ постиже максимум за $t=3R^2$, одакле следи да се највећа вредност израза под претходним кореном постиже за $x=R\sqrt{3}$. Тада важи једнакост и у примењеној неједнакости средина.

Како се ова ситуација дешава у (и само у) једнакостраничном троуглу, следи тврђење леме.

Тврђење задатка следи из горње леме, пошто је површина једнакостраничног троугла уписаног у круг полупречника R једнака $\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$ (једнакост се достиже ако и само ако је троугао једнакостранични).

Напомена. Примена неједнакости средина се могла избећи доказивањем одговарајуће тригонометријске неједнакости или применом диференцијалног рачуна.



ОК 09 2А 3

Из горњег израза за површину троугла, следи да је функција $P(x)$ непрекидна на $(0, 2R]$ и диференцијабилна на $(0, 2R)$. На $(0, 2R)$ важи $2P(x)' = \dfrac{2R^2 - x^2 + R \cdot \sqrt{4R^2 - x^2}}{\sqrt{4R^2 - x^2}}$, па је $P'(x) > 0$ за $x \in (0, R\sqrt{3})$ и $P'(x) < 0$ за $x \in (R\sqrt{3}, 2R)$, тј. максимум функције $P : (0, 2R] \to \mathbb{R}$ се постиже за $x = R\sqrt{3}$.

4. p плавих куглица треба распоредити на $b + c + 1$ места (пре прве беле или црне куглице, између k-те и $(k + 1)$-ве беле или црне куглице (за $k \in \{1, 2, \ldots, b + c - 1\}$), после последње беле или црне куглице).

Ако је $p > b + c + 1$ ово није могуће урадити (тј. у овом случају се у било ком распореду неке плаве куглице налазе једна поред друге), па је тражени број начина 0.

Ако је $p \leqslant b + c + 1$, за распоред плавих куглица треба изабрати p од $b + c + 1$ места, што се може урадити на $\dbinom{b + c + 1}{p}$ начина; распореда белих и црних има $\dfrac{(b + c)!}{b! \cdot c!}$ (пермутације са понављањем), тј. у овом случају тражени број начина је $\dbinom{b + c + 1}{p} \cdot \dfrac{(b + c)!}{b! \cdot c!}$.

5. Ако је $n = 1$, следи $2^1 + 3^1 + 4^1 = 3^2$, тј. $n = 1$ је једно решење. Нека је $n \geqslant 2$ и важи $2^n + 3^n + 4^n = x^2$, за неко $x \in \mathbb{N}$. Како је број $2^n + 3^n + 4^n$ непаран, то је и број x непаран, па је $x^2 \equiv 1 \pmod 4$, а како је $2^n \equiv 4^n \equiv 0 \pmod 4$ за $n \geqslant 2$, следи $3^n \equiv 1 \pmod 4$, односно $(-1)^n \equiv 1 \pmod 4$. Следи да је n паран број. Нека је $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$). Једначина постаје $4^k + 9^k + (4^k)^2 = x^2$. Како је $4 \equiv 1 \pmod 3$ и $9 \equiv 0 \pmod 3$, следи $4^k + 9^k + (4^k)^2 \equiv 1 + 0 + 1 = 2 \pmod 3$, па је $x^2 \equiv 2 \pmod 3$, што је немогуће (квадрати целих бројева могу дати остатке 0 и 1 при дељењу са 3).

Дакле, једино решење је $n = 1$.

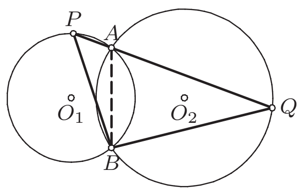
Други разред, Б категорија

1. **(а)** Како је $5 \equiv 1 \pmod 4$, $3 \equiv -1 \pmod 4$ и $357 \equiv 1 \pmod 4$, следи $\left(5^{41} + 2\right)\left(3^{105} - 1\right) + 357 \cdot \left(5^{70} + 1\right) \equiv \left(1^{41} + 2\right)\left((-1)^{105} - 1\right) + 1 \cdot \left(1^{70} + 1\right) = 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 = -4 \equiv 0 \pmod 4$.

(б) Како је $2^6 = 64 \equiv -1 \pmod{13}$, следи $2^{60} = \left(2^6\right)^{10} \equiv (-1)^{10} = 1 \pmod{13}$. Како је $3^3 = 27 \equiv 1 \pmod{13}$, следи $3^{70} = \left(3^3\right)^{23} \cdot 3 \equiv 1^{23} \cdot 3 = 3 \pmod{13}$. Дакле, $2^{60} + 3^{70} \equiv 1 + 3 = 4 \pmod{13}$, тј. овај број није дељив са 13 (Тангента 54, стр. 46, Писмени задаци, задатак 3).

2. Углови $\sphericalangle APB$ и $\sphericalangle AQB$ су углови над тетивом AB у круговима k_1 и k_2, редом, па су константни и не зависе од избора тачака P и Q, тј. $\triangle BPQ$ има исте углове, без обзира на положај праве PQ.

Нека су P_1Q_1 и P_2Q_2 два могућа положаја праве PQ. Следи $\triangle BP_1Q_1 \sim \triangle BP_2Q_2$, па важи $\dfrac{BP_1}{BQ_1} = \dfrac{BP_2}{BQ_2}$, односно однос $\dfrac{BP}{BQ}$ не зависи од положаја праве PQ.



ОК 09 2Б 2

3. Мора бити $x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$.

Нека је $x_1 \leqslant x_2$. Одузмањем прве две једначине се добија $x_1 - x_2 = \sqrt{x_3} - \sqrt{x_2}$, па је $x_3 \leqslant x_2$. Аналогно, из $x_2 - x_3 = \sqrt{x_1} - \sqrt{x_3}$, како је $x_3 \leqslant x_2$, следи $x_1 \geqslant x_3$. Коначно, из $x_1 - x_3 = \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}$, како је $x_1 \leqslant x_2$, следи $x_1 \leqslant x_3$. Дакле, $x_1 = x_2 = x_3 (= t)$. Решавањем једначине $t + \sqrt{t} = 1$, добија се $\sqrt{t} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Како је $\sqrt{t} \geqslant 0$, једина могућност је $\sqrt{t} = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, одакле је $x_1 = x_2 = x_3 = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

Случај $x_1 > x_2$ се разматра аналогно.

Дакле, једино решење овог система је $x_1 = x_2 = x_3 = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

4. Странице $\triangle ABD$ су $AB = a + b$, $AD = a + c$; нека је X додирна тачка странице BD и круга уписаног у $\triangle ABD$; по једнакости тангентних дужи је $BX = b$ и $DX = c$, па је $BD = b + c$.

Нека је r_1 полупречник кружнице уписане у $\triangle ABD$ и s његов полуобим. Следи $s = \frac{1}{2} \cdot ((a+b)+(b+c)+(c+a)) = a+b+c$, а по формулама за површину овог троугла следи $r_1 s = P = \sqrt{s\,(s-(a+b))\,(s-(b+c))\,(s-(c+a))} = \sqrt{abc(a+b+c)}$, па је

$$r > r_1 = \frac{\sqrt{abc(a+b+c)}}{a+b+c} = \sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}\,.$$

5. Видети решење првог задатка за други разред А категорије.

Трећи разред, А категорија

1. Како је $0 < \frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg} x > x$ за $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, следи $\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} > \frac{\pi}{n} > \frac{3}{n}$, одакле је

$$\sin^2\frac{\pi}{n} = \frac{\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}} = 1 - \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}} > 1 - \frac{1}{1+\left(\frac{3}{n}\right)^2} = \frac{9}{n^2+9}\,,$$

тј. $\sin\frac{\pi}{n} > \frac{3}{\sqrt{n^2+9}}$.

2. Нека је $\omega = \cos\frac{\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi}{3}$. Ако је троугао одређен тачкама a, b и c позитивно оријентисан, важи $c - a = (b-a)\cdot\omega$, а ако је негативно оријентисан важи $c - a = (b-a)\cdot\overline{\omega}$.

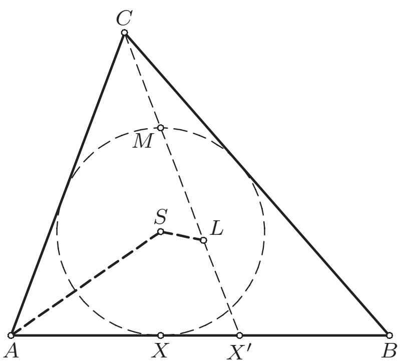
1° Ако је $a = 0$, мора бити $b \neq 0$, па је $z = -\frac{c}{b}$; у зависности оријентације, следи или $z = -\omega$ или $z = -\overline{\omega}$. Како је $|-\omega| = |-\overline{\omega}| = 1$, следи тврђење задатка.

2° Нека је $a \neq 0$. Ако је троугао одређен тачкама a, b и c позитивно оријентисан, како је $\omega^2 = \omega - 1$ ($\omega \neq -1$ је решење једначине $-1 = \omega^3$, па је $0 = 1 + \omega^3 = (1+\omega)(1-\omega+\omega^2)$), следи

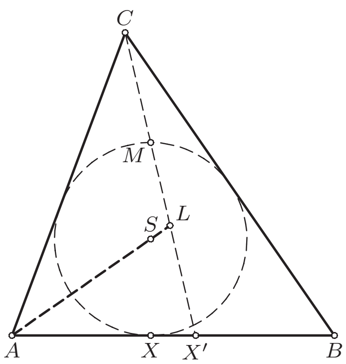
$$a(-\omega)^2 + b(-\omega) + c = a\omega^2 - b\omega + c = a\,(\omega - 1) - b\omega + c = c - a - (b-a)\cdot\omega = 0.$$

Дакле, $z = -\omega$ је решење једначине $az^2 + bz + c = 0$, па како је $|-\omega| = 1$, следи тврђење задатка. Ако је троугао негативно оријентисан, аналогно се показује да је $z = -\overline{\omega}$ једно решење једначине $az^2 + bz + c = 0$ и важи $|-\overline{\omega}| = 1$.

3. Тачка X' је додирна тачка споља приписане кружнице која одговара темену C и странице AB, па је $X'B = AX$ и $AX' = BX$ (велики задатак; хомотетија са центром у C која слика уписани круг у споља приписани круг који одговара темену C слика M у X'; веза $X'B = AX$ следи из рачуна тангентних дужи, јер је $2\cdot X'B = 2\cdot AX = AB + CA - BC$).



ОК 09 3А 3-1



ОК 09 3А 3-2

По Менелајевој теореми примењеном на $\triangle XX'M$ и тачке $A \in XX'$, $L \in X'M$, $S \in MX$ следи да су ове тачке колинеарне ако и само ако је $1 = \dfrac{XA}{AX'} \cdot \dfrac{X'L}{LM} \cdot \dfrac{MS}{SX} = \dfrac{AB + CA - BC}{AB + BC - CA} \cdot \dfrac{LX'}{LM} \cdot 1$, тј. ако и само ако је $\dfrac{CM}{MX'} = \dfrac{LX'}{LX' + LM} = \dfrac{1}{1 + \frac{LM}{LX'}} = \dfrac{1}{1 + \frac{AB+CA-BC}{AB+BC-CA}} = \dfrac{AB + BC - CA}{2 \cdot AB}$.

Нека је C' подножје висине из темена C, а r полупречник уписане кружнице $\triangle ABC$. Из израза за површину површину троугла ABC (P) следи $CC' \cdot AB = 2P = r \cdot (AB + BC + CA)$, одакле је $\dfrac{CC'}{2r} = \dfrac{AB + BC + CA}{2 \cdot AB}$. Како је $\triangle CC'X' \sim \triangle MXX'$, следи $\dfrac{AB + BC + CA}{2 \cdot AB} = \dfrac{CC'}{2r} = \dfrac{CX'}{MX'} = 1 + \dfrac{CM}{MX'}$, одакле је $\dfrac{CM}{MX'} = \dfrac{-AB + BC + CA}{2 \cdot AB}$.
Из претходног следи да су тачке A, L, S колинеарне ако и само ако важи

$$\frac{AB + BC - CA}{2 \cdot AB} = \frac{CM}{MX'} = \frac{-AB + BC + CA}{2 \cdot AB},$$

тј. ако и само ако важи $AB = CA$ (Тангента 54, стр. 20, Наградни задаци, М756).

4. Нека је d тражени број. Како $d \mid n^{13} - n$ за свако $n \in \mathbb{N}$, специјално за $n = 2$ и $n = 3$ следи

$$\begin{aligned} d \ &| \ 2^{13} - 2 = 2 \cdot \left(2^{12} - 1\right) = 2 \cdot \left(2^6 - 1\right) \cdot \left(2^6 + 1\right) = 2 \cdot 63 \cdot 65 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13, \\ d \ &| \ 3^{13} - 3 = 3 \cdot \left(3^{12} - 1\right) = 3 \cdot \left(3^6 - 1\right) \cdot \left(3^6 + 1\right) = 3 \cdot 728 \cdot 730 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 73, \end{aligned}$$

па је $d \leqslant \left(2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13, 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 73\right) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 = 2\,730$.

Са друге стране, по малој Фермаовој теореми, за свако $n \in \mathbb{N}$ број $n^{13} - n$ је дељив са 2, 3, 5, 7 и 13. Заиста, ако је p прост број, за сваки природан број n важи $n^p \equiv n \pmod{p}$ (последица мале Фермаове теореме), па се (применом за $p \in \{2, 3, 5, 7, 13\}$) добија

$$\begin{array}{rclclcll} n^{13} - n & = & n \cdot (n-1) \cdot \sum\limits_{k=0}^{11} n^k & = & \left(n^2 - n\right) \cdot \sum\limits_{k=0}^{11} n^k & \equiv & 0 & \pmod{2}, \\ n^{13} - n & = & n \cdot \left(n^2 - 1\right) \cdot \sum\limits_{k=0}^{5} n^{2k} & = & \left(n^3 - n\right) \cdot \sum\limits_{k=0}^{5} n^{2k} & \equiv & 0 & \pmod{3}, \\ n^{13} - n & = & n \cdot \left(n^4 - 1\right) \cdot \sum\limits_{k=0}^{2} n^{4k} & = & \left(n^5 - n\right) \cdot \sum\limits_{k=0}^{2} n^{4k} & \equiv & 0 & \pmod{5}, \\ n^{13} - n & = & n \cdot \left(n^6 - 1\right) \cdot \left(n^6 + 1\right) & = & \left(n^7 - n\right) \cdot \left(n^6 + 1\right) & \equiv & 0 & \pmod{7}, \\ n^{13} - n & \equiv & & & & & 0 & \pmod{13}. \end{array}$$

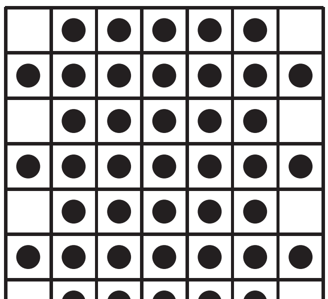
Дакле, тражени број је $d = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 = 2\,730$.

5. На таблу се може сместити 41 ловац, тако да је испуњен услов задатка (слика ОК 09 3А 5).

Нека је конфигурација која испуњава услове задатка *допустива.*

Лема. Не постоји допустива конфигурација у којој је број ловаца већи од 41.

Доказ. Треба доказати да је бар 8 поља празно (тј. на њима се не налази ловац).



ОК 09 3А 5

Ако се на неком угаоном пољу налази ловац, тада се на дијагонали на којој се налази не сме налазити више ловаца, тј. има бар 6 празних поља. На другој дијагонали дужине 7 су или празна угаона поља (дакле још 2) или, аналогно, ако је ловац на угаоном пољу, осталих 6 је празно. Како је за ове две дијагонале заједничко само једно поље, следи да и у овом случају има бар 8 празних поља.

Ако су угаона поља празна, треба доказати да постоји бар још 4 празна поља. Ако је нека од дијагонала дужине 7 у потпуности празна, то је обезбеђено. Иначе, на свакој од дијагонала дужине 7 постоји бар 2 ловца, па на свакој од ових дијагонала постоје и *крајњи* ловци, тј. ловци који на дијагонали на којој се налазе нападају угаоно поље. Крајњи ловац у овом случају мора нападати тачно 2 ловца (не може 0, јер већ напада једног; не може 4, јер је крајњи), па је он крајњи и на другој дијагонали на којој се налази.

1° Уколико се крајњи ловац налази и пољу које је заједничко за дијагонале дужине 7 (*централно поље*), празна су по три поља на обе дијагонале на којима се налази (тада он напада 2 угаона поља), као и преостала 2 угаона поља. Дакле, празно је бар 8 поља.

2° Уколико се ловац налази на пољу које има заједничко теме са угаоним пољем, празно је једно од поља на другој дијагонали на којој се налази (нека је ово поље *додељено* том ловцу). Ако је ловац на пољу које има заједничко теме са централним пољем, поред угаоног поља које му одговара, празно је и поље које се налази између тог угаоног поља и поља на коме се ловац налази (нека је ово поље *додељено* том ловцу). Како су поља која су додељена ловцима различита (споредне дијагонале дужине 2 немају заједничких поља), следи да и у овој ситуацији постоји бар 8 празних поља.

Из претходне леме следи да не постоји допустива конфигурација у којој је број ловаца већи од 41, па је одговор на питање задатка 41.

Трећи разред, Б категорија

1. Како $\vec{x}$ припада равни одређеној векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$, он је ортогоналан на $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ $(1, 3, -2)$ (i, j, k су јединични вектори x, y и z осе, редом). Нека је $\vec{x} = (k, l, m)$. Из $\vec{a}\cdot\vec{x} = 7$, $\vec{b}\cdot\vec{x} = 0$ и $(1, 3, -2)\cdot\vec{x} = 0$ се добија

$$\begin{array}{rcrcrcl} -k & + & l & + & m & = & 7, \\ 2k & & & + & m & = & 0, \\ k & + & 3l & - & 2m & = & 0. \end{array}$$

Овај систем има јединствено решење $(k, l, m) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 3\right)$, тј. тражени вектор постоји и једнак је $\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 3\right)$ (Тангента 54, стр. 45, Писмени задаци, задатак 2).

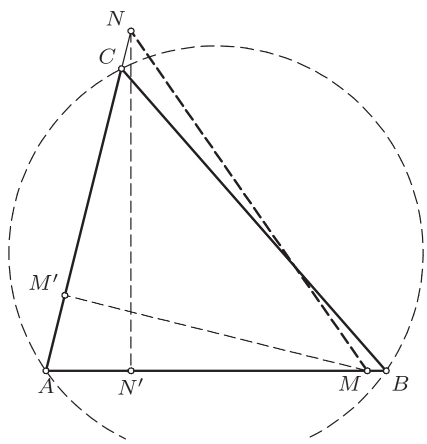
2. Нека је $\sphericalangle BAC = \alpha$ и нека су M' и N' пројекције тачака M и N на праве AC и AB, редом.

Тада је

$$AM = \frac{MM'}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin\alpha} \text{ и } AN = \frac{NN'}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin\alpha},$$

па је $\dfrac{AM}{AN} = \dfrac{AC}{AB}$, тј. троуглови ABC и AMN су слични са коефицијентом сличности $\dfrac{1}{\sin\alpha}$.

Следи $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{1}{\sin\alpha}$, па је $MN = \dfrac{BC}{\sin\alpha} = 2R$.



ОК 09 3Б 2

3. Једначина $2^x = a$ има решења ако и само ако је $a > 0$, па је захтев задатка еквивалентан са одређивањем свих p за које једначина $(p-1)t^2 - 4\cdot t + (p+2) = 0$ има бар једно позитивно решење. Ако је $p = 1$, ова једначина је линеарна и њено решење је $t = \dfrac{3}{4} > 0$. Ако је $p \neq 1$, ова једначина је квадратна и њена дискриминанта је $16 - 4\cdot(p-1)(p+2) = 4\cdot(2-p)(p+3)$. Следи, ако је $p \in (-\infty, -3)\cup(2, \infty)$, ова једначина нема решења.

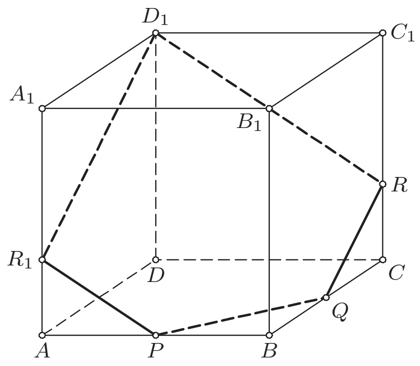
1° Ако је $p \in (1,2]$, тада је $p-1>0$, па једначина има бар једно позитивно решење ако и само ако је $\dfrac{2+\sqrt{(2-p)(p+3)}}{p-1}>0 \Leftrightarrow 2+\sqrt{(2-p)(p+3)}>0$, што је тачно.

2° Ако је $p \in [-3,1)$, тада је $p-1<0$, па једначина има бар једно позитивно решење ако и само ако је $\dfrac{2-\sqrt{(2-p)(p+3)}}{p-1}>0 \Leftrightarrow 2-\sqrt{(2-p)(p+3)}<0 \Leftrightarrow 4<(2-p)(p+3) \Leftrightarrow (p-1)(p+2)<0$, што је тачно ако је $p \in (-2,1)$.

Дакле, полазна једначина има бар једно решење ако и само ако је $p \in (-2,1)\cup\{1\}\cup(1,2] = (-2,2]$ (Тангента 51, стр. 49, Писмени задаци, задатак 1).

4. Нека је $a=1$ и нека је коцка смештена у координатни систем, тако да су $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ јединични вектори x, y и z осе, редом. У овом координатном систему је $P\left(\frac{1}{2},0,0\right)$, $Q\left(1,\frac{1}{2},0\right)$, $R\left(1,1,\frac{1}{3}\right)$, $\overrightarrow{PQ}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$, $\overrightarrow{PR}=\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{3}\right)$, $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=\left(\frac{1}{6},-\frac{1}{6},\frac{1}{4}\right)$, па је раван која садржи тачке P, Q и R $2x-2y+3z=1$. Ова раван садржи тачке $R_1\left(0,0,\frac{1}{3}\right)$ и $D_1(0,1,1)$, па како је пресек две непаралелне равни права, следи да је пресечна фигура коцке и равни PQR петоугао $PQRD_1R_1$.

Како је петоугао симетричан у односу на раван која садржи тачке B, B_1, D, D_1, следи да је његов обим $O=|\overrightarrow{PQ}|+2\cdot|\overrightarrow{QR}|+2\cdot|\overrightarrow{RD_1}| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+0}+2\cdot\sqrt{0+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}}+2\cdot\sqrt{1+0+\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{13}$.



ОК 09 3Б 4

Ако је φ угао између равни PQR и xy-равни, тада је $\cos\varphi = \dfrac{(0,0,1)\cdot(2,-2,3)}{\|(0,0,1)\|\cdot\|(2,-2,3)\|} = \dfrac{3}{\sqrt{17}}$. Ако су P и P' површина неке фигуре и њене пројекције на неку раван, редом, и притом φ угао између равни у којој се налази фигура и равни у коју се пројектује, тада је $\dfrac{P}{P'}=\dfrac{1}{\cos\varphi}$. Како се петоугао из задатка пројекцијом на xy-раван пројектује у петоугао $APQCD$ и важи $P(APQCD)=1-P(\triangle PBQ)=\dfrac{7}{8}$, следи да је $P(APQCD) = \dfrac{\frac{7}{8}}{\cos\varphi}=\dfrac{7\sqrt{17}}{24}$.

Хомотетија са центром у A и коефицијентом a слика јединичну коцку у коцку ивице a. Како је однос дужина слике и оригинала једнак коефицијенту хомотетије, а однос површина слике и оригинала једнак квадрату коефицијента хомотетије, следи да је обим петоугла $APQCD$ једнак $a\cdot\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{13}\right)$, а површина $a^2\cdot\dfrac{7\sqrt{17}}{24}$.

5. Видети решење првог задатка за трећи разред А категорије.

Четврти разред, А категорија

1. Нека је $g(x)=2e^y-y^3-4$. Функција g је добро дефинисана и бесконачно пута диференцијабилна на $[2,\infty)$. Притом је $g'(y)=2e^y-3y^2$, $g''(y)=2e^y-6y$, $g'''(y)=2e^y-6$. Користећи $e^2>6$, редом следи:

- $g'''(y)\geqslant 2e^2-6>0$, тј. функција g'' је растућа на $[2,\infty)$;
- $g''(2)\geqslant 2e^2-12>0$; како је g'' је растућа на $[2,\infty)$, следи да је $g''(y)>0$ за $y\in[2,\infty)$, па је функција g' растућа на $[2,\infty)$;

- $g'(2) \geqslant 2e^2 - 12 > 0$; како је g' је растућа на $[2,\infty)$, следи да је $g'(y) > 0$ за $y \in [2,\infty)$, па је функција g растућа на $[2,\infty)$;

- $g(2) \geqslant 2e^2 - 12 > 0$; како је g је растућа на $[2,\infty)$, следи да је $g(y) > 0$ за $y \in [2,\infty)$. Одавде се непосредно добија тврђење првог дела задатка.

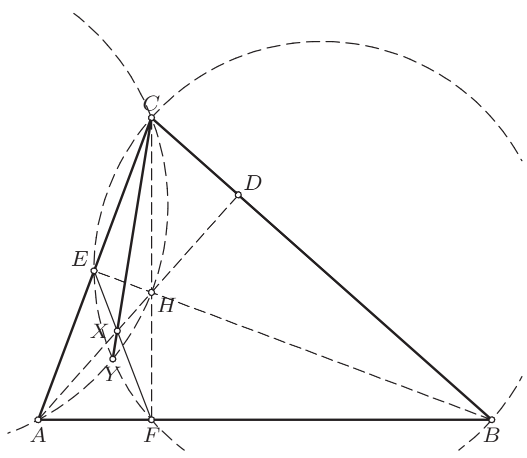
Функција f је коректно дефинисана и два пута диференцијабилна на $(0,\infty)$, па је за други део задатка довољно показати да је $f''(x) > 0$ (за $x \in (0,\infty)$). На $(0,\infty)$ је $f'(x) = \dfrac{e^{x+\frac{1}{x}} \cdot \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)}{e^{x+\frac{1}{x}} - 1}$ и

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{\left[e^{x+\frac{1}{x}} \cdot \left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)^2 + e^{x+\frac{1}{x}} \cdot \dfrac{2}{x^3}\right] \cdot \left(e^{x+\frac{1}{x}} - 1\right) - e^{x+\frac{1}{x}} \cdot \left(1-\dfrac{1}{x^2}\right) \cdot e^{x+\frac{1}{x}} \cdot \left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}{\left(e^{x+\frac{1}{x}} - 1\right)^2} \\
&= \frac{e^{x+\frac{1}{x}}}{\left(e^{x+\frac{1}{x}} - 1\right)^2} \cdot \left[e^{x+\frac{1}{x}} \cdot \left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2 + e^{x+\frac{1}{x}} \cdot \frac{2}{x^3} - \left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2 - \frac{2}{x^3} - e^{x+\frac{1}{x}} \cdot \left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2\right] \\
&= \frac{e^{x+\frac{1}{x}}}{\left(e^{x+\frac{1}{x}} - 1\right)^2} \cdot \left[e^{x+\frac{1}{x}} \cdot \frac{2}{x^3} - 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right].
\end{aligned}$$

Како је $\dfrac{e^{x+\frac{1}{x}}}{\left(e^{x+\frac{1}{x}} - 1\right)^2} > 0$, довољно је доказати да је израз у последњој загради позитиван. Како је $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$ за $x \in (0,\infty)$, користећи неједнакост првог дела задатка, последње следи из

$$\begin{aligned}
e^{x+\frac{1}{x}} \cdot \frac{2}{x^3} - 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4} &> \left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 + 4\right] \cdot \frac{1}{x^3} - 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4} \\
&= \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^6} > 0.
\end{aligned}$$

2. Права CY је радикална оса описаних кругова $\triangle AHC$ и $\triangle EBC$, па је довољно доказати да X има исту потенцију у односу на ове кругове. Потенција тачке X односу на круг описан око $\triangle AHC$ је $XA \cdot XH$, а у односу на круг описан око $\triangle BCE$ је $XE \cdot XF$ (круг описан око $\triangle BCE$ је круг над пречником BC и садржи тачку F, јер је $\sphericalangle BEC = \sphericalangle BFC = 90^\circ$). Како је четвороугао $AFHE$ тетиван ($\sphericalangle AFH = \sphericalangle HEA = 90^\circ$), из потенције тачке X у односу на описани круг овог четвороугла, следи $XE \cdot XF = XA \cdot XH$ (Тангента 54, стр. 20, Наградни задаци, М754).



ОК 09 4А 2

Друго решење. Нека је $\mathcal{I}$ инверзија са центром у C и полупречником $\sqrt{CA\cdot CE}=\sqrt{CD\cdot CB}$ (јер је четвороугао $ABDE$ тетиван ($\sphericalangle BEA=\sphericalangle BDA=90^\circ$), а производ под кореном је потенција тачке C у односу на описани круг четвороугла $ABDE$). Како је и четвороугао $AFHE$ тетиван ($\sphericalangle AFH=\sphericalangle HEA=90^\circ$), следи $CE\cdot CA=CF\cdot CH$, па је $\mathcal{I}(A)=E$, $\mathcal{I}(B)=D$, $\mathcal{I}(F)=H$. Следи да $\mathcal{I}$ слика праву EF у описани круг $\triangle AHC$, а праву AH у описани круг $\triangle CEF$ (односно описани круг $\triangle CEB$).

Дакле, тачка X (пресек правих EF и AH) са $\mathcal{I}$ се слика у Y (пресек одговарајућих кругова), па су тачке X, Y и центар инверзије (C) колинеарне.

3. Треба одредити остатак броја $x=2^{2^p}+1$ при дељењу 100, тј. при дељењу са 4 и при дељењу са 25. Како је $2^p>1$, следи $4\mid 2^{2^p}$, па је $x\equiv 1 \pmod 4$.
Ако је $p>2$ прост број, он је непаран. Нека је $p=2k+1$ ($k\in\mathbb{N}$). Следи $2^p=2^{2k+1}\equiv 2\cdot 4^k\equiv 2\cdot(-1)^k \pmod 5$, па је $2^p\equiv 2 \pmod 5$ ако је k парно, односно $2^p\equiv 3 \pmod 5$ ако је k непарно. Такође је $2^p\equiv 0 \pmod 4$, па је или $2^p\equiv 12 \pmod{20}$ или $2^p\equiv 8 \pmod{20}$ (по кинеској теореми о остацима, претходни системи једначина имају јединствено решење у систему остатака по модулу 20).
На основу Ојлерове теореме је $2^{20}\equiv 1 \pmod{25}$ (важи $(2,25)=1$), па је

$$\begin{aligned}\text{или } x &\equiv 2^{2^p}+1\equiv 2^{12}+1=4\,097\equiv 22 \pmod{25}\\ \text{или } x &\equiv 2^{2^p}+1\equiv 2^{8}+1=257\equiv 7 \pmod{25}.\end{aligned}$$

Пошто је и $x\equiv 1 \pmod 4$, ако је $p>2$ важи или $x\equiv 97 \pmod{100}$ или $x\equiv 57 \pmod{100}$ (по кинеској теореми о остацима, претходни системи једначина имају јединствено решење у систему остатака по модулу 100).

Дакле, ако је p непаран прост број, остатак при дељењу x са 100 једнак је или 57 или 97 или 17 (ово у случају $p=2$), одакле се добија одговор на питање задатка.

4. Нека је $p(x)=\sum\limits_{n=0}^{k}a_nx^n$ ($k=\deg p$). Из услова је $p(x)=p(\varepsilon x)=p(\varepsilon^2x)$ (за свако $x\in\mathbb{C}$), па је

$$p(x)=\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{k}a_nx^n(1+\varepsilon^n+\varepsilon^{2n})=\sum_{\substack{3\mid n\\ 0\leqslant n\leqslant k}}a_nx^n$$

(јер је $1+\varepsilon^n+\varepsilon^{2n}=0$ ако $3\nmid n$, односно $1+\varepsilon^n+\varepsilon^{2n}=3$ ако $3\mid n$).
За целе m,n и $k\in\mathbb{N}_0$ важи $m^3-n^3\mid m^{3k}-n^{3k}$, па следи $m^3-n^3\mid p(m)-p(n)$, одакле $2^3-1^3=7\mid p(2)-p(1)=8$, што је немогуће.

Дакле, не постоји полином са наведеним особинама.

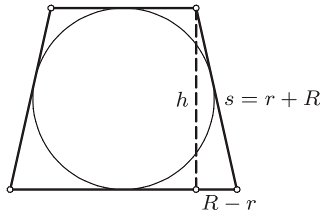
5. Видети решење петог задатка за трећи разред А категорије.

Четврти разред, Б категорија

1. Функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, дефинисана са $f(x)=x^3-3x^2-9x$, је диференцијабилна на $\mathbb{R}$ и важи $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$, па строго расте на $(-\infty,-1)$ и на $(3,\infty)$, а строго опада на $(-1,3)$. На сваком интервалу строге монотоности f може узимати фиксну вредност највише једном, па је број решења једначине $f(x)=a$ највише 3 и једнак је 3 ако ова једначина има по једно решење на сваком од интервала монотоности. Како је $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $f(-1)=5$, $f(3)=-27$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, следи да је $f(-\infty,-1)=(-\infty,5)$, $f(-1,3)=(-27,5)$, $f(3,\infty)=(-27,\infty)$, па једначина $f(x)=a$ има три различита решења ако и само ако је $a\in(-27,5)$ (Тангента 52, стр. 44, Писмени задаци, задатак 1).

2. Нека је r полупречник мање, а R поупречник веће основице купе и $\alpha=\dfrac{r}{R}$. Нека је s изводница, а h висина купе. Осни пресек купе је једнакокраки трапез у који се може уписати кружница. Како су краци тог трапеза s, а дужине основица $2r$ и $2R$, следи $2s=2r+2R$, тј. $s=r+R$. Из податка о површини омотача следи $4(R^2-r^2)\pi=(R+r)s\pi=(R+r)^2\pi$, одакле је $4(R-r)=R+r$, тј. $\alpha=\dfrac{3}{5}$. Из Питагорине теореме је $h^2=s^2-(R-r)^2=(R+r)^2-(R-r)^2=4rR=4R^2\alpha$.

Полупречник лопте уписане у купу једнак је половини висине купе (трапеза), па је њена запремина $V_L = \frac{4}{3} \cdot \left(R\sqrt{\alpha}\right)^3 \pi = \frac{4R^3\pi}{3} \cdot \alpha^{\frac{3}{2}}$. Запремина купе је $V_K = \frac{h\pi}{3} \cdot (R^2 + Rr + r^2) = \frac{2R^3\pi}{3} \cdot \sqrt{\alpha} \cdot (1 + \alpha + \alpha^2)$. Коначно, $\frac{V_L}{V_K} = \dfrac{\frac{4R^3\pi}{3} \cdot \alpha^{\frac{3}{2}}}{\frac{2R^3\pi}{3} \cdot \sqrt{\alpha} \cdot (1+\alpha+\alpha^2)} = \frac{2\alpha}{1+\alpha+\alpha^2} = \frac{30}{49}$ (Тангента 54, стр. 45, Писмени задаци, задатак 1).



ОК 09 4Б 2

3. Из везе којом је дефинисан низ се добија $x_4 = 2$, $x_5 = 1$, $x_6 = 2$, $x_7 = 3$, $x_8 = 2$. Индукцијом је $x_{n+4} = x_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Заиста, база индукције је садржана у горњам рачуну. Нека је тврђење тачно за све чланове низа чији је индекс не већи од $n + 4$ ($n \geqslant 3$). Тада је $x_{n+5} = x_{n+4} - x_{n+3} + x_{n+2} = x_n - x_{n-1} + x_{n-2} = x_{n+1}$. Дакле, важи $x_{2k} = 2$ за свако $k \in \mathbb{N}$; $x_{4k+1} = 1$ за свако $k \in \mathbb{N}_0$; $x_{4k+3} = 3$ за свако $k \in \mathbb{N}_0$.

Ред из задатка је ред са позитивним члановима, па је могуће пермутовати његове чланове. Како је $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ за $|q| < 1$ (збир геометријске прогресије), следи

$$\begin{aligned} S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} &= 1 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{4k+1}} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2k}} + 3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{4k+3}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{4k+1}} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2k}} \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3^4}} + 2 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{4}{9} \cdot \frac{81}{80} + \frac{2}{9} \cdot \frac{9}{8} = \frac{7}{10}. \end{aligned}$$

4. Видети решење трећег задатка за други разред А категорије.

5. Ако је $a = 0$, за свако $x > 0$, $x \neq 1$ важи $\log_x x^2 = 2$, па је (у овом случају) $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ скуп решења неједначине (и он је бесконачан).

Нека је $a \neq 0$. Неједначина има смисла за $x \in (-a, 1-a) \cup (1-a, \infty)$.

1° Ако је $x \in (-a, 1-a)$, тада је $0 < x + a < 1$, а полазна неједначина је еквивалентна са $x^2 + a^2 \leqslant (x+a)^2$, односно са $0 \leqslant ax$. Ако је $a > 0$ решења су $x \in [0, \infty) \cap (-a, 1-a)$, па за $1 - a > 0$ неједначина има бесконачно много решења, док за $1 - a \leqslant 0$ нема решења. Ако је $a < 0$ решења су $x \in (-\infty, 0] \cap (-a, 1-a) = \emptyset$, па за овакве вредности параметра a нема решења.

2° Ако је $x \in (1-a, \infty)$, тада је $1 < x + a$, а полазна неједначина је еквивалентна са $x^2 + a^2 \geqslant (x+a)^2$, односно са $0 \geqslant ax$. Ако је $a > 0$ решења су $x \in (-\infty, 0] \cap (1-a, \infty)$, па за $1 - a < 0$ неједначина има бесконачно много решења, док за $1 - a \geqslant 0$ нема решења. Ако је $a < 0$ решења су $x \in [0, \infty) \cap (1-a, +\infty) = (1-a, \infty)$ (тј. у овом случају има бесконачно много решења).

Из 1° следи да полазна неједначина има бесконачно много решења ако је $a \in (0, 1)$. Из 2° следи да полазна неједначина има бесконачно много решења ако је $a \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$. Из 1° и 2° следи да полазна неједначина нема решења ако је $a = 1$.

Дакле, јединствена вредност параметра a за коју полазна неједначина има коначан скуп решења је $a = 1$.

У прилогу дописа шаљемо Вам задатке и решења задатака Окружног такмичења ученика средњих школа, које треба да се одржи 28.02.2009.

Председник Друштва
математичара Србије

Бранко Поповић

Решења задатака Окружног такмичење ученика средњих школа, 28.02.2009. Отворити комисијски по завршетку такмичења

Решења задатака Окружног такмичење ученика средњих школа, 28.02.2009. Отворити комисијски по завршетку такмичења

Решења задатака Окружног такмичење ученика средњих школа, 28.02.2009. Отворити комисијски по завршетку такмичења

Решења задатака Окружног такмичење ученика средњих школа, 28.02.2009. Отворити комисијски по завршетку такмичења

Решења задатака Окружног такмичење ученика средњих школа, 28.02.2009. Отворити комисијски по завршетку такмичења

Решења задатака Окружног такмичење ученика средњих школа, 28.02.2009. Отворити комисијски по завршетку такмичења

Решења задатака Окружног такмичење ученика средњих школа, 28.02.2009. Отворити комисијски по завршетку такмичења

Решења задатака Окружног такмичење ученика средњих школа, 28.02.2009. Отворити комисијски по завршетку такмичења

Решења задатака Окружног такмичење ученика средњих школа, 28.02.2009. Отворити комисијски по завршетку такмичења

Решења задатака Окружног такмичење ученика средњих школа, 28.02.2009. Отворити комисијски по завршетку такмичења

Решења задатака Окружног такмичење ученика средњих школа, 28.02.2009. Отворити комисијски по завршетку такмичења

Решења задатака Окружног такмичење ученика средњих школа, 28.02.2009. Отворити комисијски по завршетку такмичења

Решења задатака Окружног такмичење ученика средњих школа, 28.02.2009. Отворити комисијски по завршетку такмичења

Решења задатака Окружног такмичење ученика средњих школа, 28.02.2009. Отворити комисијски по завршетку такмичења

Решења задатака Окружног такмичење ученика средњих школа, 28.02.2009. Отворити комисијски по завршетку такмичења

Решења задатака Окружног такмичење ученика средњих школа, 28.02.2009. Отворити комисијски по завршетку такмичења

Решења задатака Окружног такмичење ученика средњих школа, 28.02.2009. Отворити комисијски по завршетку такмичења

Решења задатака Окружног такмичење ученика средњих школа, 28.02.2009. Отворити комисијски по завршетку такмичења