РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28.01.2006.

Први разред – А категорија

1. На колико начина се 3 топа могу поставити на шаховску таблу димензија 6×2006 тако да се узајамно не туку (тј. два топа се не могу истовремено наћи у истој врсти или истој колони)?

Решење: Први топ се на таблу може поставити на било које поље, дакле на $6 \cdot 2006$ начина. Следећи топ се може поставити на неко од поља која се не налазе у истој врсти или колони са претходно већ постављеним топом. Другим речима "прецртамо" забрањену колону и врсту и поставимо други топ на новодобијену шаховску таблу димензија 5×2005, то се може урадити на $5 \cdot 2005$ начина. Слично, последни топ се може поставити на $4 \cdot 2004$ начина. Поредак стављања топова није битан, дакле иста позиција се појављује $3! = 6$ пута. Коначан одговор је

$$(6 \cdot 2006 \cdot 5 \cdot 2005 \cdot 4 \cdot 2004) : 6 = 20 \cdot 2006 \cdot 2005 \cdot 2004.$$

Напомена: Решење се може формулисати на више начина. Нпр. могуће је изабрати 3 колоне и независно 3 врсте у којима ће се топови налазити, то се може извести на $\binom{2006}{3} \cdot \binom{6}{3}$ начина. У изабране колоне и врсте се топови могу поставити на $3! = 6$ начина итд.

2. Одреди највећи заједнички делилац бројева $2^{2006} - 1$ и $2^{2004} - 1$.

Решење: НЗД заданих бројева је и делилац њихове разлике $2^{2006} - 2^{2004} = 2^{2004}(2^2 - 1) = 2^{2004} \cdot 3$. Пошто су задати бројеви непарни, остаје да се провери да ли је НЗД 1 или 3. Лако се доказује да је $2^{2n} - 1$ увек дељив са 3. Заиста, $2^{2n} - 1 = 4^n - 1$ па то следи нпр. из идентитета $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + \ldots + x + 1)$. Тачан одговор је НЗД $= 3$.

3. Збир 49 природних бројева једнак је 999. Наћи највећу могућу вредност њиховог највећег заједничког делиоца. (**M388**)

Решење: Нека је d највећи заједнички делилац тих 49 природних бројева. Тада важи

$$d \mid 999 = 3^3 \cdot 37$$

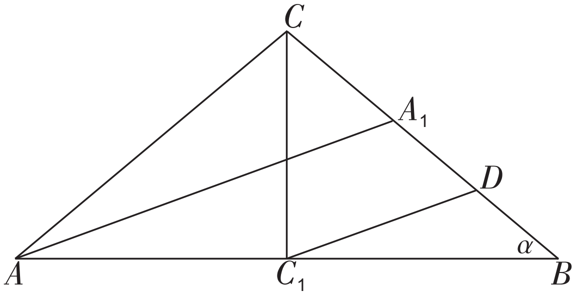
и како мора бити $d \leqslant \frac{999}{49} < 21$, следи $d \in \{1, 3, 9\}$. Вредност 9 се може постићи, нпр.

$$\underbrace{9 + 9 + \cdots + 9}_{48} + 567 = 999$$

и тада је $NZD(9, 9, \ldots, 9, 567) = 9$.

4. Одредити углове једнакокраког троугла у коме је дужина симетрале угла на основици једнака двострукој дужини висине која одговара основици. (**M362**)

Решење: Нека је $\triangle ABC$ (слика 1) посматрани једнакокраки троугао, CC_1 његова висина која одговара основици AB, AA_1 симетрала угла A и α мера углова на основици.

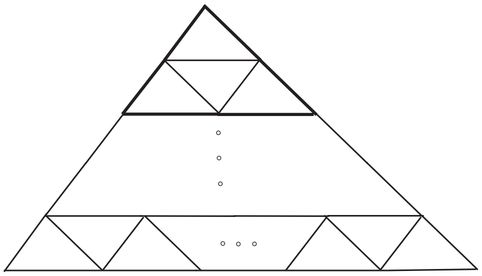


Слика 1.

Означимо са D средиште дужи BA_1. Тада је C_1D средња линија $\triangle ABA_1$, па је $C_1D = \frac{AA_1}{2}$ и $C_1D \parallel AA_1$, одакле је $\sphericalangle BC_1D = \sphericalangle BAA_1 = \frac{\alpha}{2}$. По услову задатка је $AA_1 = 2 \cdot CC_1$, па је на основу претходног $CC_1 = C_1D$. Према томе, $\triangle CC_1D$ је једнакокрак, па је $\sphericalangle DCC_1 = \sphericalangle CDC_1 = 90^0 - \alpha$, одакле је $\sphericalangle CC_1D = 2\alpha$. Како је $\sphericalangle CC_1D + \sphericalangle DC_1B = 2\alpha + \frac{\alpha}{2} = 90^0$, закључујемо да је $\alpha = 36^0$, тј. углови у $\triangle ABC$ су 36^0, 36^0 и 108^0.

5. Може ли се једнакостранични троугао поделити на 2006 једнакостраничних троуглова? (**M327**)

Решење: Произвољни троугао увек можемо поделити на n^2 подударних троуглова (слика 2) $(1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2)$.



Слика 2.

Одговарајућим спајањем по 4 или 9 таквих троуглова добијамо такође троугао сличан полазном, а укупан број троуглова се умањује за 3, односно 8. Како је $45^2 - 2 \cdot 8 - 1 \cdot 3 = 2025 - 19 = 2006$, закључујемо да је могуће произвољни троугао поделити на 2006 троуглова који су му слични.

(*Напомена:* Постоје и многа друга решења!)

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28.01.2006.

Први разред – Б категорија

1. Одредити број деветоцифрених бројева дељивих са 225, код којих су све цифре различите а цифра стотина им је 7.

(Тан36, стр. 26)

Решење: Уочимо да је $225 = 25 \cdot 9$. Из дељивости са 25 закључујемо да су последње две цифре траженог броја $00, 25, 50$ или 75. Случај 00 није могућ јер све цифре морају бити различите, као (из истих разлога) ни случај 75 јер је цифра стотина 7. Тражени број је дељив са 9 и свих девет цифара су му различите. Пошто је $0 + 1 + 2 + \ldots + 9 = 45$, избацивањем једног од ових бројева се добија број дељив са 9 само ако је избачени број или 0 или 9. Ако је избачена цифра 0, последње три цифре морају бити 725 а преостале цифре се могу изабрати на 6! начина. Ако је избачена цифра 9, онда су могућа оба случаја 25 и 50 па дакле има $2 \cdot 6!$ оваквих бројева. Коначан одговор је $3 \cdot 6!$.

2. На колико начина се 3 топа могу могу поставити на шаховску таблу димензија 6×2006 тако да се узајамно не туку (тј. два топа се не могу истовремено наћи у истој врсти или истој колони)?

Решење: Видети решење истог задатка за први разред у А категорији (задатак **1.**).

3. Нека је $S = \{a, b, c\}$. Колико има функција $f : S \to S$ за које важи $f(f(x)) = x$ за свако $x \in S$?

Решење 1: Услов задатака каже да ако је $f(x) = y$ за неке елементе x и y да онда важи и $f(y) = x$. Функција “идентитет” тј. функција која задовољава услов да је $f(x) = x$ за сваки x је једно решење. За свако друго решење се могу наћи $x \neq y$ такви да је $f(x) = y$ и $f(y) = x$. Ако је нпр. $\{x, y\} = \{a, b\}$ онда је $f(c) = c$. Слично, ако је $\{x, y\} = \{b, c\}$ онда је $f(a) = a$ и ако је $\{x, y\} = \{c, a\}$ онда је $f(b) = b$. Одавде следи да има укупно 4 такве функције.

Решење 2: Докажимо најпре да је функција f бијекција. Ако је $f(x) = f(y)$ за неке $x, y \in S$, онда је $x = f(f(x)) = f(f(y)) = y$. Овим смо доказали да је функција ”1–1”. Функција f је и ”на” пошто се за сваки $x \in S$ добија као слика од $f(x)$ (зато што важи $f(f(x)) = x$. Постоји $3! = 6$ бијекција скупа S и то су

$$f_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} f_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix} f_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} f_5 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix} f_6 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

Од наведених само функције f_1, f_2, f_3 и f_6 задовољавају задати услов. Тражених функција дакле има 4.

4. Наћи све уређене парове реалних бројева (x, y) који задовољавају једначине (**M324**)

$$|x + y - 4| = 5, \quad |x - 3| + |y - 1| = 5.$$

Решење: Из датог система следи да је $|x+y-4| = |x-3+y-1| = |x-3| + |y-1|$, а ово је тачно само ако су $x - 3$ и $y - 1$ истог знака. Дакле, решења треба тражити у областима $D_1 = \{(x, y) \mid x \geqslant 3,\, y \geqslant 1\}$ и $D_2 = \{(x, y) \mid x \leqslant 3,\, y \leqslant 1\}$.
У области D_1 систем је еквивалентан једначини $x+y-4 = 5$, па је скуп решења у тој области $R_1 = \{(x, y) \mid y = 9 - x,\, 3 \leqslant x \leqslant 8\}$.
У области D_2 систем је еквивалентан једначини $x+y = -1$, па је скуп решења у овој области $R_2 = \{(x, y) \mid y = -1-x,\, -2 \leqslant x \leqslant 3\}$.
Дакле, скуп решења полазног система је $R = R_1 \cup R_2$.

5. Збир 49 природних бројева једнак је 999. Наћи највећу могућу вредност њиховог највећег заједничког делиоца. (**M388**)

Решење: Видети решење истог задатка за први разред у А категорији (задатак **3.**).

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28.01.2006.

Други разред – А категорија

1. Одредити све целе бројеве a за које су изрази $96 + a$ и $5 + a$ кубови целих бројева. (**М405**)

Решење 1: Нека је a цео број такав да је $96+a = x^3$ и $5+a = y^3$, за неке целе бројеве x и y. Тада је $x^3-y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2) = 91$.

Нека је $x - y = m$, за неки цео број m (очигледно $m \in \{\pm1, \pm7, \pm13, \pm91\}$). Тада је $x = m + y$ и $x^2 + xy + y^2 = \frac{91}{m}$, па је

$$(m + y)^2 + (m + y)y + y^2 = \frac{91}{m}, \quad \text{тј.} \quad 3y^2 + 3my + \left(m^2 - \frac{91}{m}\right) = 0.$$

Дискриминанта последње једначине, $D = \frac{3}{m}\left(364 - m^3\right)$, мора бити потпун квадрат. За $m > 7$ имамо да је $\frac{3}{m} > 0$ и $364-m^3 < 0$, па је $D < 0$. Такође, за $m < 0$ имамо $\frac{3}{m} < 0$ и $364 - m^3 > 0$, па је, поново, $D < 0$. Дакле, $0 < m \leqslant 7$, па је $m = 1$ или $m = 7$. За $m = 1$, $D = 1089 = 33^2$, па $y \in \{-6, 5\}$, односно $a \in \{-221, 120\}$. За $m = 7$, $D = 9 = 3^2$, па $y \in \{-3, -4\}$, односно $a \in \{-32, -69\}$.

Дакле, $a \in \{-221, -69, -32, 120\}$.

Решење 2: Као и у првом решењу, задатак се своди на решавање (у целим бројевима) једначине $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) = 91$. Имајући у виду да је $x > y$ закључујемо да је $x - y$ један од позитивних делилаца броја 91. Постоје 4 могућности,

$$\begin{cases} x-y = 1 \\ x^2+xy+y^2 = 91 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y = 7 \\ x^2+xy+y^2 = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y = 13 \\ x^2+xy+y^2 = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y = 91 \\ x^2+xy+y^2 = 1 \end{cases}$$

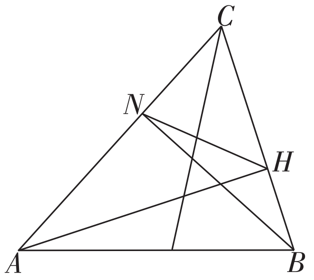
Први систем има једно решење $x = 6, y = 5$ и друго $x = -5, y = -6$. Други систем има решења $x = 3, y = -4$ и $x = 4, y = -3$. Трећи и четврти немају решења у целим бројевима. Одавде се повратно добијају вредности за a и одговор као и у првом решењу.

2. Може ли се једнакостранични троугао поделити на 2006 једнакостраничних троуглова? (**М327**)

Решење: Видети решење истог задатка за први разред у А категорији (задатак **5.**).

3. Наћи $\sphericalangle ACB$ оштроуглог $\triangle ABC$ ако је познато да дуж HN, која спаја подножја висина AH и BN, полови симетралу $\sphericalangle ACB$. (**М436**)

Решење: Како је $\dfrac{HC}{AC} = \cos\gamma = \dfrac{NC}{BC}$ $(\gamma = \sphericalangle ACB)$, закључујемо да су троуглови HCN и ABC слични са коефицијентом сличности $k = \cos\gamma$ (слика 1). Симетрала угла γ троугла ABC истовремено је и симетрала угла у троуглу HCN. По услову задатка однос дужина симетрала у једном и другом троуглу је $\dfrac{1}{2}$. Како је однос одговарајућих дужинских елемената у сличним троугловима једнак коефицијенту сличности, то је $k = \cos\gamma = \dfrac{1}{2}$, одакле је $\gamma = 60^0$.



Слика 1.

4. Наћи све $x \in \mathbb{R}$ за које је неједначина

$$(1) \qquad (2-a)x^3 + (1-2a)x^2 - 6x + (5+4a-a^2) < 0$$

тачна бар за једну вредност $a \in [-1, 2]$.

Решење: Напишимо леву страну неједначине (1) као квадратну функцију по a,

$$(2) \qquad f(a) = -a^2 + a(4 - 2x^2 - x^3) + 2x^3 + x^2 - 6x + 5.$$

Приметимо да је $f(a)$ увек конкавна функција! Отуда закључујемо да се тражени x може наћи ако и само ако је испуњен бар један од услова

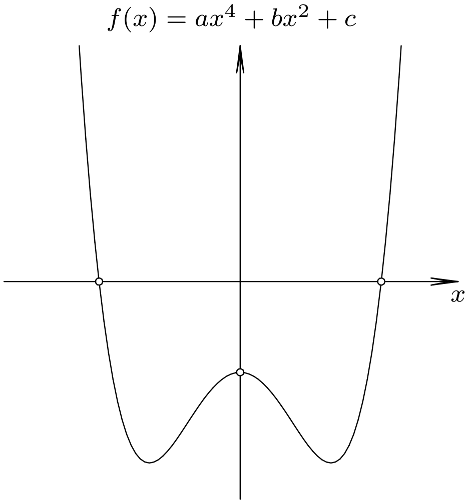
$$f(-1) < 0 \qquad \text{или} \qquad f(2) < 0.$$

Случај $f(-1) < 0$ је еквивалентан са $x(x^2 + x - 2) < 0$ што води ка решењу $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 1)$.

Случај $f(2) < 0$ је еквивалентан са $x^2 + 2x - 3 > 0$ што води ка решењу $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.

Коначно решење је $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

5. На слици је скица графика функције $y = ax^4 + bx^2 + c$. Какве знаке имају коефицијенти a, b и c?



Решење 1: Коефицијент a није нула, јер скицирани график није ни парабола ни хоризонтална права. Како је, због $y = x^4(a + b/x^2 + c/x^4)$, за јако велике x знак функције исти као знак коефицијента a, мора бити $a > 0$. Како је $c = f(0)$, према скици је $c < 0$. Докажимо да је $b < 0$. У супротном је $-b/\{2a\} \leq 0$, па је апсциса темена графика функције $f(x) = ax^2 + bx + c$ непозитивна. Због $a > 0$, функција $f(x)$ расте на $[0, \infty)$.

Одатле следи да и дата функција y расте на истом интервалу, што према скици није тачно. Дакле $b < 0$.

Решење 2: Лако се уочава да је $a > 0$ (за довољно велико x мора бити $f(x) > 0$). Са графика видимо да је $f(0) < 0$, и како је $c = f(0)$ закључујемо и да је $c < 0$. Такође са графика се види да постоји $x_0 > 0$ за које је $f(x_0) < c$. Из последње релације добијамо да је $ax_0^4 + bx_0^2 < 0$ што је могуће само у случају када је $b < 0$. Дакле мора бити $a > 0, b < 0, c < 0$.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28.01.2006.

Други разред – Б категорија

1. Одредити све комплексне бројеве $z = x+iy$, за које важи $|z-2| = |z+2i|$ и $|z+2| = |z-2i|$. (Тан. 41, стр. 27, II.5.)

Решење: Из првог услова се добија $|(x-2)+iy| = |x+(y+2)i|$ одакле се добија $(x-2)^2+y^2 = x^2+(y+2)^2$ тј. $x+y=0$. Други услов је еквивалентан са $|(x+2)+iy| = |x+(y-2)i|$ одакле се добија $(x+2)^2+y^2 = x^2+(y-2)^2$ што је опет еквивалентно са $x+y=0$. Закључак је да тражена својства имају сви комплексни бројеви облика $z = x-ix$, где је x реалан број.

2. За коју вредност параметра m у једначини

$$x^2-2mx+3m^2-38m+156=0$$

је једно решење веће од другог? (сличан са Тан. 34, стр. 49)

Решење: Услов је еквивалентан услову да је $D > 0$ где је D дискриминанта једначине. Ова нејдначина се после сређивања своди на неједначину $m^2-19m+78 < 0$. Одговараајуће нуле су 6 и 13 одакле следи да је скуп решења интервал $(6, 13)$.

3. Наћи $\sphericalangle ACB$ оштроуглог $\triangle ABC$ ако је познато да дуж HN, која спаја подножја висина AH и BN, полови симетралу $\sphericalangle ACB$. (**M436**)

Решење: Видети решење истог задатка за други разред у А категорији (задатак **3.**).

4. Доказати да за $m, n \in \mathbb{N}$ важи (И.Т.)

$$n\sqrt{m-1}+m\sqrt{n-1} \leq mn.$$

Решење: За $n \geqslant 1$ је $\frac{\sqrt{n-1}}{n} \leqslant \frac{1}{2}$. Заиста, сменом $n-1=t^2$, где је према услову $t \geqslant 0$, наведена неједнакост је еквивалентна са $\frac{t}{t^2+1} \leqslant \frac{1}{2}$ што је еквивалентно са $2t \leqslant t^2+1$ односно $0 \leqslant (t-1)^2$. Без увођења смене ово се може доказати и овако $\frac{\sqrt{n-1}}{n} - \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{n-1}-n+1-1}{2n} = \frac{-(\sqrt{n-1}-1)^2}{2n} \leqslant 0$. Слично важи и $\frac{\sqrt{m-1}}{m} \leqslant \frac{1}{2}$ па се сабирањем ових неједнакости добија $\frac{\sqrt{n-1}}{n} + \frac{\sqrt{m-1}}{m} \leqslant 1$ одакле следи тражена неједнакост.

5. Показати да постоји бесконачно много четворки целих позитивних бројева x, y, z, t за које важи:

$$x^3 + y^4 = z^5 + t^6.$$

Решење: Довољно је наћи бесконачно много решења једначина $x^3 = z^5$ и $y^4 = t^6$. У првом случају се решење може потражити у облику $x = a^p$ и $z = a^q$ где је a позитиван цео број. Једначина $x^3 = z^5$ је задовољена ако је $3p = 5q$ што је испуњено ако је $p = 5u$ а $q = 3u$ за неки природан број u. Дакле прву једначину задовољава бесконачно много парова $x = a^{5u}$ и $z = a^{3u}$. Слично, другу једначину задовољавају сви парови $y = b^{3v}$ и $t = b^{2v}$ за неке природне бројеве b и v.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28.01.2006.

Трећи разред – А категорија

1. Решити систем једначина

$$\begin{array}{rcrcrcl}\log_2 x & + & \log_4 y & + & \log_4 z & = & 2\\ \log_3 y & + & \log_9 z & + & \log_9 x & = & 2\\ \log_4 z & + & \log_{16} x & + & \log_{16} y & = & 2.\end{array}$$

Решење: Због дефинисаности логаритма имамо $x, y, z > 0$. Дати систем једначина је еквивалентан са системом

$$\begin{array}{rcr}x\sqrt{yz} & = & 4\\ y\sqrt{zx} & = & 9\\ z\sqrt{xy} & = & 16.\end{array}$$

Множењем све три једнакости добијамо $(xyz)^2 = 24^2$ тј. $xyz = 24$. Одавде и из претходних једначина лако се добија да је $x = 2/3, y = 27/8$ и $z = 32/3$.

2. Наћи све уређене парове реалних бројева (a, b) такве да је

$$(a + bi)^{2006} = a - bi.$$

Решење: Ако уведемо ознаку $z = a + bi$ једначина прелази у облик $z^{2006} = \bar{z}$. Узимајући модул леве и десне стране добијамо $|z|^{2006} = |z|$. Сада имамо две могућности. Или је $|z| = 0$, у ком случају долазимо до решења $z_0 = 0 + 0i$, или је $|z|^{2005} = 1 \Rightarrow |z| = 1$. У другом случају помножимо обе стране једначине $z^{2006} = \bar{z}$ са z чиме наведена једначина прелази у једначину $z^{2007} = \bar{z}z$, односно једначину $z^{2007} = 1$. Одавде добијамо решења $z_k = \cos\frac{2k\pi}{2007} + i\sin\frac{2k\pi}{2007}$ за $k = 1, 2, \ldots, 2007$. Дакле тражени парови су елементи скупа

$$\{(0,0)\} \cup \{(\cos\frac{2k\pi}{2007}, \sin\frac{2k\pi}{2007}) \mid k = 1, \ldots, 2007\}.$$

3. Ако странице троугла задовољавају релацију $a - b = b - c \geqslant 0$ доказати да други по величини угао не прелази 60°. (**M470**)

Решење: Пошто је $a \geqslant b \geqslant c$, други по величини угао је β. Према косинусној теореми важи:

$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{a^2+c^2-\left(\dfrac{a+c}{2}\right)^2}{2ac} = \frac{3}{8}\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)-\frac{1}{4}.$$

Из познате неједнакости $\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{a} \geqslant 2$, добијамо да је $\cos\beta \geqslant \dfrac{3}{8}\cdot 2-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$, одакле следи да је $\beta \leqslant 60°$.

4. Нека је $a+b+c=1$ и нека су a,b,c дужине страница троугла. Доказати да је $a^2+b^2+c^2<\frac{1}{2}$.

Решење: Из Косинусне теореме следи $a^2+b^2+c^2 = 2ab\cos\gamma + 2bc\cos\alpha + 2ca\cos\beta < 2(ab+bc+ca)$ што заједно са релацијом $2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)=1-(a^2+b^2+c^2)$ даје неједнакост $a^2+b^2+c^2 \leqslant 1-(a^2+b^2+c^2)$ еквивалетну траженој неједнакости.

(Тан. 34, стр. 8)

5. Постоје ли природни бројеви x, y и z за које важи:

$$x^3+y^4=z^5\,?$$

Решење: Потражимо решење у облику $x=2^p, y=2^q$ и $z=2^r$ уз додатни услов $3p=4q$. Последњи услов нам омогућује да тражену једначину сведемо на једначину облика $2^{3p}+2^{4q}=2^{5r}$ тј. на једначину $2^{3p+1}=2^{5r}$.

Дакле довољно је наћи решења система једначина $3p=4q$ и $3p+1=5r$. Прва једначина има бесконачно много решења $p=4t, q=3t$ где је t природан број. Друга једначина је задовољена ако је $12t+1=5r$ тј. ако је нпр. $t=5k+2$ за неки природан број k. Одавде добијамо за сваки природан број k решење

$$x=2^{20k+8} \quad y=2^{15k+6} \quad z=2^{12k+5}.$$

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28.01.2006.

Трећи разред – Б категорија

1. Решити систем једначина

$$\begin{array}{rcrcrcl} \log_2 x & + & \log_4 y & + & \log_4 z & = & 2 \\ \log_3 y & + & \log_9 z & + & \log_9 x & = & 2 \\ \log_4 z & + & \log_{16} x & + & \log_{16} y & = & 2. \end{array}$$

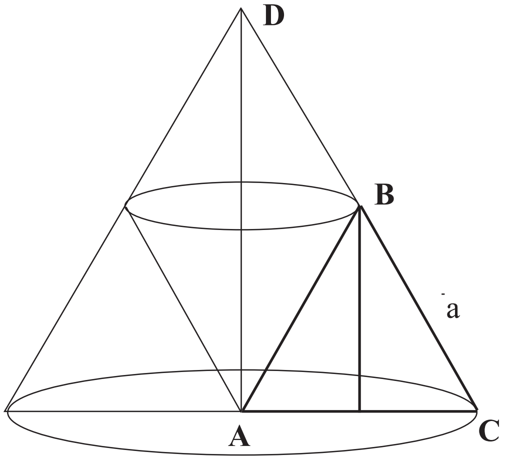
Решење: Видети решење истог задатка за трећи разред у А категорији (задатак **1.**).

2. Једнакостранични троугао ABC, странице a, ротира око праве која садржи теме A и паралелна је висини кроз теме B. Израчунати површину и запремину добијеног ротационог тела.

(Тан. 37, стр. 37, III.2.)

Решење: Анализом слике 1 види се да је тражено ротационо тело добијено тако што се из једнакостраничне купе полупречника основе a исече двострука купа полупречника основе $a/2$. Формуле за површину и запремину једнакостраничне купе са полупречником основе r су

$$P_r = 3r^2\pi \qquad V_r = \frac{\sqrt{3}}{3}r^3\pi.$$



Слика 1.

Одавде се добија резултат

$$P = 3a^2\pi \qquad V = \frac{\sqrt{3}}{3}a^3\pi - 2\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^3\pi = \frac{\sqrt{3}}{4}a^3\pi.$$

3. Ако странице троугла задовољавају релацију

$$a - b = b - c \geqslant 0$$

доказати да други по величини угао не прелази 60°. (**М470**)

Решење: Видети решење истог задатка за трећи разред у А категорији (задатак **3.**).

4. Одредити скуп решења неједначине $\sin^4 x + \cos^4 x \leqslant \frac{3}{4}$.
(Тан. 40, стр. 56)

Решење: Из једнакости $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2(2x)$ следи да је наведена неједнакост еквивалентна са $1 - \frac{1}{2}\sin^2(2x) \leqslant \frac{3}{4}$. После сређивања добијамо неједначину $\frac{1}{2} \leqslant \sin^2(2x)$ односно еквивалентну неједначину $\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant |\sin(2x)|$. Одавде се добија еквиvалетна релација $\frac{\pi}{4} + k\pi \leqslant 2x \leqslant \frac{3\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ одакле се добија и коначно решење

$$\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

5. На школској табли су слике правилног 12-угла и правилног 15-угла. Оба полигона су уписана у кружнице једнаких полупречника. Ана је обим 12-угла помножила са површином 15-угла а Марија је обим 15-угла помножила са површином 12-угла. Која од њих две је добила већи број?

Решење: Означимо са P_{12} површину 12-угла а са P_{15} површину 15-угла. Слично, нека је O_{12} обим 12-угла а O_{15} обим 15-угла. Анин број је $O_{12} \cdot P_{15}$ а Маријин број је $O_{15} \cdot P_{12}$. Задатак је да се упореде ови бројеви, тј. да се упореде бројеви

$$A = \frac{P_{15}}{O_{15}} \quad \text{i} \quad M = \frac{P_{12}}{O_{12}}.$$

Разбијањем полигона на једнакокраке троуглове лако се налази да је $A = h_{15}/2$ и $M = h_{12}/2$ где су $h_{15} = r\cos\frac{\pi}{15}$ и $h_{12} = r\cos\frac{\pi}{12}$ висине одговарајућих троуглова. Пошто су краци ових једнакокраких троуглова једнаки, закључујемо да је $A > M$.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28.01.2006.

Четврти разред – А категорија

1. Нека је функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задата формулом $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$. Одредити максималну и минималну вредност ове функције.

Решење 1: Уочимо да је

$$f(x) = 5(\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x) = 5\sin(x+\alpha)$$

где је α угао одређен условом $\cos\alpha = 3/5, \sin\alpha = 4/5, 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$. Одавде се одмах добија да су максимум (минимум) ове функције 5 (односно -5).

Решење 2: Први извод функције f је $f'(x) = 3\cos x - 4\sin x$. Нуле извода су нуле једначине $\operatorname{tg} x = 3/4$ и у неким од ових тачака функција достиже максималну а у неким минималну вредност (овде се ослањамо на периодичност функције). Ако је $\operatorname{tg} x = 3/4$ онда се показује да су одговарајуће вредности синуса и косинуса $\sin x = 3/5, \cos x = 4/5$ или $\sin x = -3/5, \cos x = -4/5$. Одавде зе закључује да су максимум и минимум функције f редом 5 и -5.
Напомена: Може се анализирати и други извод функције али се опет закључак да је један од локалних максимума (минимума) и глобални максимум (минимум) изводи из периодичности функције.

2. Наћи највећу вредност функције

$$f(x) = \frac{x}{x^2+9} + \frac{1}{x^2-6x+21} + \cos 2\pi x$$

на интервалу $(0, +\infty)$. (**M375**)

Решење: Посматрајмо прво све сабирке појединачно. Како је

$$\frac{x}{x^2+9} = \frac{1}{x+\frac{9}{x}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{x\frac{9}{x}}} = \frac{1}{6},$$

закључујемо да је највећа вредност првог сабирка $\frac{1}{6}$ и она се постиже за $x = 3$, док из

$$\frac{1}{x^2-6x+21} = \frac{1}{(x-3)^2+12} \leqslant \frac{1}{12},$$

закључујемо да је највећа вредност другог сабирка $\frac{1}{12}$ и да се она постиже за $x = 3$. Највећа вредност трећег сабирка је 1 и она се постиже за свако целобројно x, па и за $x = 3$. Дакле, највећа вредност функције

$$f(x) = \frac{x}{x^2+9} + \frac{1}{x^2-6x+21} + \cos 2\pi x$$

на интервалу $(0, +\infty)$ је $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + 1 = \frac{5}{4}$ и постиже се за $x = 3$.

3. Претпоставимо да смо реалну функцију ψ увели на следећи начин

$$\psi(x) = \begin{cases} x, & x > 2, \\ 2, & 1 < x \leqslant 2, \\ 2x, & x \leqslant 1. \end{cases}$$

(а) Решити неједначину $\psi(x) < x$;

(б) Решити једначину $\psi(x) + \psi(1-x) + \psi(\psi(x)) = 2$. (**M359**)

Решење:

(а) Очигледно, скуп решења неједначине је подскуп интервала $(-\infty, 1]$, па решавамо неједначину $2x < x$. Дакле, $x \in (-\infty, 0)$.

(б) Одредимо прво функције $\psi(1-x)$ и $\psi(\psi(x))$. На основу дате дефиниције функције ψ добијамо

$$\psi(1-x) = \begin{cases} 1-x, & x < -1 \\ 2, & -1 \leqslant x < 0 \\ 2-2x, & x \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \psi(\psi(x)) = \begin{cases} 4x, & x \leqslant \frac{1}{2} \\ 2, & \frac{1}{2} < x \leqslant 2 \\ x, & x > 2 \end{cases}$$

Сада, једноставним рачуном долазимо до решења $x \in [2, +\infty) \cup \{0\}$.

4. Наћи све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такве да за произвољне реалне бројеве x и y важи једнакост $f(x-y) = f(x) + f(y) - 2xy$. (**M403**)

Решење: Нека је $x = y$, тада, по услову задатка, важи једнакост

$$f(0) = f(x) + f(x) - 2x^2,$$

односно $f(x) = x^2 + \frac{a}{2}$, где је $a = f(0)$. Ако је $x = y = 0$, добијамо да је $a = 2a$, тј. $a = 0$. Дакле, $f(x) = x^2$ је једини кандидат за такву функцију. Непосредна провера показује да ова функција заиста и задовољава наведени услов.

5. Постоје ли цели позитивни бројеви x, y, z за које важи:

$$x^3 + y^4 = z^5.$$

Решење: Видети решење истог задатка за 3. разред у А категорији (задатак **5.**).

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28.01.2006.

Четврти разред – Б категорија

1. Решити систем једначина

$$\begin{array}{ccccccc} \log_2 x & + & \log_4 y & + & \log_4 z & = & 2 \\ \log_3 y & + & \log_9 z & + & \log_9 x & = & 2 \\ \log_4 z & + & \log_{16} x & + & \log_{16} y & = & 2. \end{array}$$

Решење: Видети решење истог задатка за трећи разред у А категорији (задатак **1.**).

2. Нека је функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задата формулом $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$. Одредити максималну и минималну вредност ове функције.

Решење: Видети решење истог задатка за 4. разред у А категорију (задатак **1.**).

3. Наћи вредности параметра p за које једначина $x^4 - (3p+2)x^2 + p^2 = 0$ има четири реална решења која образују аритметичку прогресију. **(M332)**

Решење: Дата једначина је биквадратна, па су њена решења симетрична у односу на координантни почетак, а како и образују аритметичку прогресију, она су облика

$$-\frac{3}{2}\,d,\ -\frac{1}{2}\,d,\ \frac{1}{2}\,d,\ \frac{3}{2}\,d.$$

Ако уведемо смену $t = x^2$ полазна једначина постаје $t^2-(3p+2)t+p^2 = 0$, и решења ове једначине су $t_1 = \frac{1}{4}\,d^2$ и $t_2 = \frac{9}{4}\,d^2$. Сада, помоћу Виетових формула за квадратне једначине добијамо

$$\frac{1}{4}d^2 + \frac{9}{4}d^2 = 3p+2, \quad \frac{1}{4}d^2 \cdot \frac{9}{4}d^2 = p^2,$$

односно

$$\frac{5}{2}d^2 = 3p+2, \quad \frac{9}{16}d^4 = p^2.$$

Из претходне две једначине добијамо $9p+6 = 10|p|$, па су тражене вредности за параметар p бројеви 6 и $-\frac{6}{19}$.

4. Наћи највећу вредност функције

$$f(x) = \frac{x}{x^2+9} + \frac{1}{x^2-6x+21} + \cos 2\pi x$$

на интервалу $(0, +\infty)$. (**M375**)

Решење: Видети решење истог задатка за 4. разред у А категорији (задатак **2.**).

5. Претпоставимо да смо реалну функцију ψ увели на следећи начин

$$\psi(x) = \begin{cases} x, & x > 2, \\ 2, & 1 < x \leqslant 2, \\ 2x, & x \leqslant 1. \end{cases}$$

(а) Решити неједначину $\psi(x) < x$;

(б) Решити једначину $\psi(x) + \psi(1-x) + \psi(\psi(x)) = 2$. (**M359**)

Решење: Видети решење истог задатка за 4. разред у А категорији (задатак **3.**).