РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

РПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.03.2006.

Први разред – А категорија

1. Ако су $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ непразни подскупови равни α, такви да је $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}=\emptyset$ и $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}=\alpha$, доказати да постоји једнакокраки правоугли троугао чија су сва три темена у једном од скупова $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$.

Решење: Бар један од скупова $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ садржи бар две тачке. Нека је то скуп $\mathcal{A}$ и нека су то тачке P и Q. Уочимо квадрат $PQRS$ ($PQ \parallel RS$). Ако је нека од тачака R, S у скупу $\mathcal{A}$, доказ је готов. Зато, нека су $R,S\in\mathcal{B}$. Нека је O центар квадрата $PQRS$. Ако је $O\in\mathcal{A}$, онда троугао PQO испуњава услове задатка, а ако је $O\in\mathcal{B}$, онда троугао ROS испуњава услове задатка.

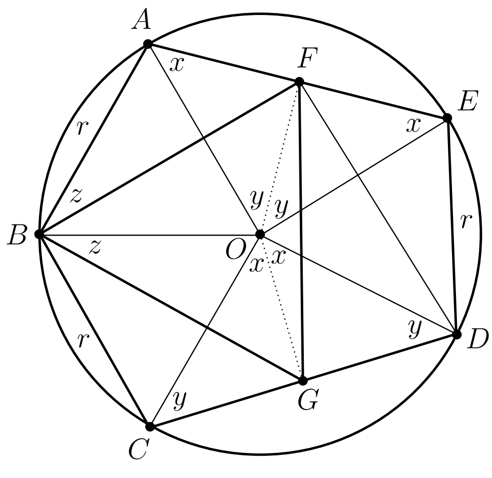
2. У $\mathbb{Z}^3$ решити $3x^2+3y^2+3z^2+2x+2y+2z=2004$.

Решење: Једначина из задатка је еквивалентна са $(3x+1)^2+(3y+1)^2+(3z+1)^2=3\cdot 2004+3$. Како је $3\cdot 2004+3\equiv 3\cdot 4+3\equiv 7 \pmod 8$ и како квадрати целих бројева при дељењу са 8 могу дати остатке $0,1$ или 4, следи да једначина нема решења.

3. Петоугао $ABCDE$ уписан је у круг полупречника r. Ако је $AB=BC=DE=r$, доказати да је троугао BGF једнакостраничан,

Решење: Нека је O центар кружнице. Тада је $OG\perp CD$ и OG је симетрала угла COD. Нека је $x=\sphericalangle COG=\sphericalangle DOG$. Слично, нека је $y=\sphericalangle EOF=\sphericalangle AOF$. Како су $\triangle DOE$, $\triangle BOA$ и $\triangle BOC$ једнакостранични имамо да је $\sphericalangle DOE=\sphericalangle BOA=\sphericalangle BOC=60^\circ$, па је

$$360^\circ = 2\cdot 60^\circ + 2x + 2y, \text{ тј. } x+y=90^\circ.$$



Лако закључујемо и да је

$$x = \sphericalangle OAE = \sphericalangle OEA \text{ и } y = \sphericalangle OCD = \sphericalangle ODC.$$

Из подударности троуглова AOF и OCG следи да је $AF = OG$ и $OF = CG$. Такође, како је $\sphericalangle BAF = 60^\circ + x = \sphericalangle BOG$, имамо да су и троуглови BAF и BOG подударни, па је $BF = BG$. Дакле, $\triangle GBF$ је једнакокраки са врхом B. Из $\triangle BAF \cong \triangle BOG$, следи и да је $\sphericalangle ABF = \sphericalangle OBG = z$, па је $60^\circ = \sphericalangle ABO = z + \sphericalangle OBF = \sphericalangle FBG$, па је $\triangle GBF$ једнакостраничан троугао.

4. Од свих троуглова једнаког обима највећу површину има једнакостраничан троугао. Доказати.

Решење: Површина једнакостраничног троугла је $P_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, али можемо ставити да је $a = \frac{2s}{3}$ па добијамо да је $P_1 = \left(\frac{2s}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$. Површину произвољног троугла можемо израчунати Хероновим обрасцем па неједнакост коју треба да докажемо постаје:

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \left(\frac{2s}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Квадрирањем неједнакости и сређивањем добијамо

$$(s-a)(s-b)(s-c) \leq \left(\frac{s}{3}\right)^3$$

Ова неједнакост је тачна, јер када на леву страну применимо неједнакост између аритметичке и геометријске средине добићемо

$$(s-a)(s-b)(s-c) \leq \left(\frac{s-a+s-b+s-c}{3}\right)^3$$

$$(s-a)(s-b)(s-c) \leq (\frac{3s-2s}{3})^3$$

$$(s-a)(s-b)(s-c) \leq (\frac{s}{3})^3$$

Једнакост важи када је $s-a = s-b = s-c$,тј. када је $a = b = c$

5. За неки природан број n, $n > 3$, у запису броја $\frac{n(n+1)}{2}$ учествују све исте цифре. Која цифра то може бити?

Решење: Нека је тражена цифра једнака a. Тада би важило да је $\frac{n(n+1)}{2} = a \cdot \underbrace{11...1}_{k}$, $k > 1$, односно

$$(2n+1)^2 = 8 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 1 = 8 \cdot a \cdot \underbrace{11...1}_{k} + 1.$$

Ако је $a \in \{2, 4, 7, 9\}$ број на десној страни предходне једнакости завршава се са 3 или 7, а то није могуће пошто је он потпун квадрат. Ако је пак $a \in \{3, 8\}$ онда је двоцифрени завршетак броја $8 \cdot a \cdot \underbrace{11...1}_{k} + 1$ једнак 65 или 05. Међутим ово није могуће јер би се тада број $2n+1$ завршавао цифром 5, а његов квадрат са 25 (због $(10l+5)^2 = 100(l^2+l)+25$). Дакле, остају нам могућности $a=1$, $a=5$ и $a=6$. Докажимо да није могуће $a=1$. Претпоставимо да је $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{10^k-1}{9}$ за неко $k > 1$. Отуда је

$$2 \cdot 10^k = 9n^2 + 9n + 2 = (3n+1)(3n+2).$$

Како су бројеви $3n+1$ и $3n+2$ узајамно прости, то један од њих мора бити степен двојке, а други степен петице. Међутим, како је

$$5^k - 2^{k+1} > 2^{2k} - 2^{k+1} \geq 2^{k+2} - 2^{k+1} = 2^{k+1} \geq 8,$$

то бројеви 5^k и 2^{k+1} не могу бити узастопни, те тражена цифра није једнака 1.

Очигледно, могуће је $a=5$, јер је $\frac{10 \cdot 11}{2} = 55$, као и $a=6$, пошто је $\frac{12 \cdot 13}{2} = 66$. Из свега наведеног закључујемо да је тражена цифра 5 или 6.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.03.2006.

Први разред – Б категорија

1.

Решење:

2. Ако су $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ непразни подскупови равни α, такви да је $\mathcal{A}\cap\mathcal{B} = \emptyset$ и $\mathcal{A}\cup\mathcal{B} = \alpha$, доказати да постоји једнакокраки правоугли троугао чија су сва три темена у једном од скупова $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$.

Решење: Бар један од скупова $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ садржи бар две тачке. Нека је то скуп $\mathcal{A}$ и нека су то тачке P и Q. Уочимо квадрат $PQRS$ ($PQ \parallel RS$). Ако је нека од тачака R, S у скупу $\mathcal{A}$, доказ је готов. Зато, нека су $R, S \in \mathcal{B}$. Нека је O центар квадрата $PQRS$. Ако је $O \in \mathcal{A}$, онда троугао PQO испуњава услове задатка, а ако је $O \in \mathcal{B}$, онда троугао ROS испуњава услове задатка.

3. а) Доказати да број $n^2 + n + 1$ није дељив са 2006 ни за један природан број n.
б) Доказати да број $n^2 + n + 2$ није дељив са 2007 ни за један природан број n.

Решење: а) Број $n^2 + n + 1 = n(n + 1) + 1$ је непаран, па не може бити дељив парним бројем 2006. б) Број $n^2 + n + 2$ није дељив са 3 па не може бити дељив бројем 2007.

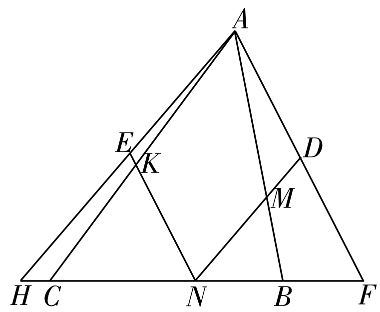
4. Дат је троугао ABC у коме важи $\sphericalangle C = 90^o + \frac{\sphericalangle B}{2}$. Нека је M средиште странице BC. Круг са центром у A и полупречником AM сече, опет, праву BC у D. Доказати да је $MD = AB$.

Решење: Нека је E друга пресечна тачка круга са центром у A и полупречником AC са правом BC. Како су троуглови ACE и ADM једнакокраки, закључујемо да је $\sphericalangle AED = \sphericalangle ACM$ и $\sphericalangle ADM = \sphericalangle AMD$. Следи да су троуглови AMC и ADE подударни и $DE = CM$. Тачка M је средиште странице BC, па је $DM = EB$. Из једнакости $\sphericalangle AEC = \sphericalangle ACE = 90^o - \frac{\sphericalangle B}{2}$, следи $\sphericalangle BAE = 180^o - \sphericalangle AEB - \sphericalangle B = 90^o - \frac{\sphericalangle B}{2}$. Сада је $AB = BE$ и наравно $AB = MD$.

5. Кружница уписана у троугао ABC додирује његове странице AB, BC и CA у тачкама M, N и K редом. Права кроз тачку A, паралелна са NK, сече праву NM у тачки D. Права кроз тачку

A, паралелна са NM, сече праву NK у тачки E. Доказати да права DE садржи средњу линију троугла ABC.

Решење: Нека праве AD и AE секу праву BC у тачкама F и H, редом (видети слику). Довољно је доказати да је DE средња линија троугла AFH. Троугао MBN је једнакокрак ($BM = BN$) и $MN \parallel AH$, па је $AMNH$ једнакокраки трапез, тј. $NH = AM$. Аналогно се показује да је $FN = AK$. Како је $AK = AM$, то из добијених једнакости следи да је $FN = NH$, тј. N је средиште дужи FH. Тада је D средиште AF, а E средиште AH. Дакле, права DE садржи средњу линију троугла ABC.



РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.03.2006.

Други разред – А категорија

1. Доказати да је број $2^{n+2} \cdot 7^n + 1$ сложен за сваки природан број n.

Решење 1: Рачунајући првих неколико чланова низа $a_n = 2^{n+2} \cdot 7^n + 1$ наслућујемо да су бројеви a_{2k-1} дељиви са 3, а бројеви a_{2k} – са 5, што и доказујемо индукцијом. Број $a_1 = 57$ је дељив са 3. Нека је a_{2k-1} дељив са 3. Тада је и број $a_{2k+1} = 196a_{2k-1} - 3 \cdot 65$ дељив са 3. Број $a_2 = 785$ је дељив са 5. Нека је a_{2k} дељив са 5. Тада је и број $a_{2k+2} = 196a_{2k} - 5 \cdot 39$ дељив са 5. Како су сви a_n већи од 5, то су они сложени.

Решење 2: Како су сви $a_n = 2^{n+2} \cdot 7^n + 1$ већи од 5 и како је

$$a_{2k-1} = 2^{2k+1} \cdot 7^{2k-1} + 1 \equiv (-1)^{2k-1} \cdot 1 + 1 = 0 \pmod 3$$

$$a_{2k} = 2^{2k+2} \cdot 7^{2k} + 1 \equiv 2^{2k+2} \cdot 2^{2k} + 1 = 4^{2k+1} + 1 \equiv (-1)^{2k-1} + 1 = 0 \pmod 5$$

то су сви a_n сложени бројеви.

2. Да ли постоје неподударни троуглови једнаких обима и површине?

Решење: Одговор је да. Потребан услов да позитивни реални бројеви a, O, P буду редом дужина једне стране, обим и површина неког троугла је $2a < O$ (неједнакост троугла). Ако је неједнакост $2a < O$ испуњена онда је природно покушати конструкцију траженог троугла на следећи начин. Изаберимо тачке B и C такве да је $\overline{BC} = a$. Нека је $\mathcal{E}$ елипса којој су тачке B и C жиже таква да X припада елипси уколико је збир њених удаљености од жижа једнак $O - a$. Другим речима свака тачка на елипси која не припада правој $p = p(B, C)$ је треће теме троугла коме је обим O.

Нека је q права паралелна са $p = p(B, C)$ и на удаљености h од те праве где је $(1/2)a \cdot h = P$. Уколико је P довољно мало, тачније ако важи неједнакост

$$\frac{2P}{a} = h \leq \sqrt{\left(\frac{O-a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

онда права q сече елипсу $\mathcal{E}$ и тиме се добија треће теме A траженог троугла. Ова анализа такође показује да уколико постоји троугао такав да су му a, O, P страна, обим и површина, да је је он јединствен тј. да су сви такви троуглови подударни. Нека су a, b, c дужине страна тог троугла. Ако се изабере a_1 тако да задовољава услове

$$2a_1 < O \qquad a < a_1 \qquad a_1 \notin \{a, b, c\}$$

онда постоји троугао коме су a_1, O, P страна, обим и површина и овај троугао има исти обим и површину као и претходни али са њим није подударан.

3. Нека је k полукружница са центром O конструисана над пречником AB и нека су тачке S_1, S_2, S_3 на полукружници k такве да је $\sphericalangle AOS_1 = \sphericalangle S_1OS_2 = \frac{\pi}{9}$ и $\sphericalangle S_2OS_3 = \frac{2\pi}{9}$. Доказати да је $P_1P_2 = P_3O$, где су P_1, P_2, P_3 пројекције тачака S_1, S_2, S_3 на пречник AB.

Решење: Доказ је последица следећег низа еквиваленција

$$\begin{aligned}
&P_1P_2 = P_3O \;\Leftrightarrow\; OP_1 = OP_2 + OP_3 \;\Leftrightarrow\\
&\frac{OP_1}{OA} = \frac{OP_2}{OA} + \frac{OP_3}{OA} \;\Leftrightarrow\\
&\cos\frac{\pi}{9} = \cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{4\pi}{9} \;\Leftrightarrow\\
&\cos\frac{\pi}{9} = 2\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{9} \;\Leftrightarrow\\
&\cos\frac{\pi}{9} = \cos\frac{\pi}{9}
\end{aligned}$$

4. У дневној соби се налази неки број људи, и познато је да сваки од њих познаје тачно пет присутних. Доказати да је за неко $n > 5$ могуће одабрати n људи из дневне собе и сместити их за округли сто у трпезарији тако да свако седи између два познаника.

Решење: Од (не неопходно свих) људи из дневне собе најпре формирамо врсту максималне дужине за коју важи да се свака два суседна човека у врсти познају. Другим речима, није могуће формирати дужу врсту од ове, такву да се свака два суседна човека познају.

Први човек у овој врсти има пет познаника који сви такође морају бити у врсти, јер врста у супротном не би била максимална. Ако сада одаберемо редом људе из врсте, од првог човека до последњег његовог познаника у врсти, и сместимо их за округли сто у том редоследу, јасно је да ће свако седети између својих познаника. Број људи за столом је већи од пет, јер за њим седи први човек из врсте и свих пет његових познаника.

5. У скупу реалних бројева решити једначину $x = \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + x}}}$

Решење: Једначина је дефинисана за $x \in [-2,2]$, јер мора бити $2+x \geq 0$ и $\sqrt{2+x} \leq 2$. Нека је $x = 2\cos t$, $t \in [0,\pi]$. Тада је $\cos\frac{t}{2} \geq 0$ и $\sqrt{2+x} = \sqrt{2(1+\cos t)} = \sqrt{4\cos^2\frac{t}{2}} = 2\cos\frac{t}{2}$. Даље је, $\sqrt{2-2\cos\frac{t}{2}} = \sqrt{2(1-\cos\frac{t}{2})} = \sqrt{4\sin^2\frac{t}{4}} = 2\sin\frac{t}{4}$, јер је $\sin\frac{t}{4} \geq 0$. Такође, $\sqrt{2+2\sin\frac{t}{4}} = \sqrt{2(1+\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{4}))} = \sqrt{4\cos^2(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{8})} = 2\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{8})$, јер је $\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{8}) \geq 0$. Коначно, једначина постаје $\cos t = \cos(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{8})$, $t \in [0,\pi]$, тј. $t = \frac{2\pi}{9}$, односно, $x = 2\cos\frac{2\pi}{9}$.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.03.2006.

Други разред – Б категорија

1. Наћи сва целобројна решења једначине

$$\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x-1} = 1.$$

Решење: Ако обе стране дате једначине степенујемо на трећи, добијамо једначину еквивалентну полазној

$$x^2 - 3\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{x-1}(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x-1}) - x + 1 = 1.$$

Како је $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x-1} = 1$, то из последње једначине следи

$$x^2 - 3\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{x-1} - x = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x^4} - 3\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x}) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x}(x-1) - 3\sqrt[3]{x-1}) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{x-1}(\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(x-1)^2} - 3) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\sqrt[3]{x^2} = 0 \vee \sqrt[3]{x-1} = 0 \vee \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(x-1)^2} = 3 \Longleftrightarrow$$

$$x = 0 \vee x = 1 \vee x(x-1)^2 = 27.$$

Ако је $x \in Z$ решење једначине $x(x-1)^2 = 27$, онда x дели 27 и $x > 0$. Зато провером за $x = 1,\ x = 3,\ x = 9$ и $x = 27$ видимо да та једначина нема целобројно решење. Дакле, једини цели бројеви који могу бити решења полазне једначине су $x = 0$ и $x = 1$. Провером добијамо да ово заиста јесу решења (провера мора да се изврши, пошто трансформацијама нисмо увек добијали еквивалентне једначине почетној).

2. Постоје ли реални бројеви b и c такви да свака од једначина $x^2 + bx + c = 0$ и $2x^2 + (b+1)x + c + 1 = 0$ има по два целобројна корена? (**M389**)

Решење: Неку су целобројни корени прве једначине k и l, а друге m и n. Тада би на основу Виетових правила важило

(1) $$k + l = -b$$

(2) $$k \cdot l = c$$

(3) $$2(m + n) = -b - 1,$$

(4) $$2m \cdot n = c + 1.$$

Из једнакости (4) следи да је број c непаран. Сада, на основу једнакости (2) закључујемо да су бројеви k и l непарни, из чега, даље, на основу (1), закључујемо да је b паран број. Међутим, на основу (3) следи да је b непаран број. Стога, бројеви b и c са траженим својством не постоје.

3. Нека је функција $f : R \longrightarrow R$, дата са $f(x) = \frac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+5}$, за свако $x \in R$. Одредити максималну вредност (ако постоји) дате функције.

Решење 1: Треба видети да ли постоји реалан број a, такав да је

$$\frac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+5} \leq a$$

за свако $x \in R$, и ако постоји пронаћи његову најмању вредност. Неједначина $\frac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+5} \leq a$ еквивалентна је са неједначином

$$0 \leq a(x^2+4x+5) - (2x^2+6x+6),$$

(пошто је $x^2+4x+5 = (x+2)^2+1 > 0$ за свако $x \in R$), односно са неједначином

$$0 \leq (a-2)x^2 + (4a-6)x + 5a - 6.$$

Нека је $g(x) = (a-2)x^2+(4a-6)x+5a-6$. За $a = 2$ функција $g(x)$ је линеарна и очигледно је за неке реалне бројеве њена вредност негативна (када је $x < -2$). Ако је $a \neq 2$, тада је $g(x)$ квадратна функција, која треба да буде ненегативна за свако $x \in R$. То је остварено акко је $a - 2 > 0$ и $0 \geq D = (4a-6)^2 - 4(a-2)(5a-6) = -4a^2 + 16a - 12$, односно ако је $a > 2$ и $a \in (-\infty, 1] \bigcup [3, \infty)$, дакле за $a \geq 3$. На овај начин смо доказали да је $f(x) \leq 3$, за свако $x \in R$, а једнакост се достиже само за $x = -3$. Из свега наведеног закључујемо да дата функција има максимум и да је он једнак 3.

Решење 2: Како је

$$\frac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+5} = \frac{2x^2+8x+10-2x-4}{x^2+4x+5}$$

$$= 2 - \frac{2x+4}{x^2+4x+5} = 2 - \frac{2(x+2)}{(x+2)^2+1},$$

на основу неједнакости

$$-1 \leq \frac{2t}{t^2+1} \leq 1$$

следи да је

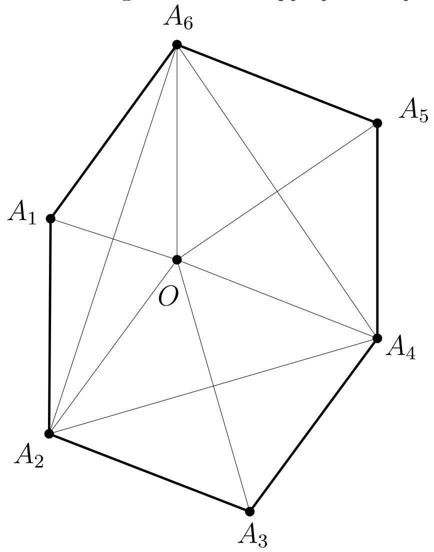
$$2 - \frac{2(x+2)}{(x+2)^2+1} \leq 2 - (-1) = 3.$$

Максимум се добија за

$$x + 2 = -1 \Rightarrow x = 3$$

4. Дат је конвексан шестоугао $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ чије су све странице једнаке и $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 = \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6$, при чему је α_i унутрашњи угао шестоугла код темена A_i. Доказати да је $\alpha_1 = \alpha_4$, $\alpha_2 = \alpha_5$ и $\alpha_3 = \alpha_6$.

Решење: Како је збир унутрашњих углова у конвексном шесоуглу $720°$, следи да је $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 = \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 = 360°$, па се темена A_1, A_3, A_5 осном симетријом редом у односу на праве A_6A_2, A_2A_4, A_4A_6 пресликавају у исту тачку O.



(Пресликајмо A_1 у односу на A_6A_2 у тачку O. Нека је Op полуправа која неконвексан угао A_6OA_2 дели на два угла величине α_3 и α_5: $\sphericalangle A_2Op = \alpha_3$ и $\sphericalangle A_6Op = \alpha_5$. На полуправој Op уочимо тачку A да је OA једнако страници шестоугла. Из $\triangle A_2A_3A_4 \cong \triangle A_2OA$ и $\triangle A_4A_5A_6 \cong \triangle A_6OA$ следи да је $A_2A_4 = A_2A$ и $A_4A_6 = A_6A$, па се тачке A_4 и A поклапају.)

Наспрамни углови ромба су једнаки, па је $\alpha_1 = \sphericalangle A_6OA_2$, $\alpha_3 = \sphericalangle A_2OA_4$, $\alpha_5 = \sphericalangle A_4OA_6$. Пошто су краци углова A_6OA_2 и $A_5A_4A_3$ паралелни и једнако усмерени следи да су једнаки па је $\alpha_1 = \alpha_4$, Слично се закључује да је $\alpha_2 = \alpha_5$ и $\alpha_3 = \alpha_6$.

5. У дневној соби се налази неки број људи, и познато је да сваки од њих познаје тачно пет присутних. Доказати да је за неко $n > 5$ могуће одабрати n људи из дневне собе и сместити их за округли сто у трпезарији тако да свако седи између два познаника.

Решење: Од (не неопходно свих) људи из дневне собе најпре формирамо врсту максималне дужине за коју важи да се свака два суседна човека у врсти познају. Другим речима, није могуће формирати дужу врсту од ове, такву да се свака два суседна човека познају.

Први човек у овој врсти има пет познаника који сви такође морају бити у врсти, јер врста у супротном не би била максимална. Ако сада одаберемо редом људе из врсте, од првог човека до последњег његовог познаника у врсти, и сместимо их за округли сто у том редоследу, јасно је да ће свако седети између својих познаника. Број људи за столом је већи од пет, јер за њим седи први човек из врсте и свих пет његових познаника.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.03.2006.

Трећи разред – А категорија

1. Одредити све вредности природног броја n, за који постоји његов делилац k, тако да $nd+1$ дели n^2+d^2.

Решење: Напишимо n у облику $n = kd$. Из дељивости $nd+1 \mid n^2+d^2$ добијамо:

$$d^2k+1 \mid d^2(k^2+1)$$

Како су d^2k+1 и d^2 узајамно прости, налазимо да је $d^2k+1 \mid k^2+1$. Отуда је $k \geqslant d^2$. Из особине дељивости добијамо:

$$d^2k+1 \mid k^2+1-(d^2k+1) = k(k-d^2)$$

Како су k и d^2k+1 узајамно прости, имамо да $d^2k+1 \mid k-d^2$. Уколико је $k \neq d^2$, имамо очигледну неједнакост

$$d^2k+1 > k-d^2 \quad \Leftrightarrow \quad d^2(k+1)+1 > k.$$

Ово је контрадикција. Зато је $k = d^2$ и $n = d^3$.

2. Доказати да за сваки природан број n важи неједнакост: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2 - \frac{2}{\sqrt{n+1}}$.

Решење: Означимо са $L(n)$ израз на левој страни и покажимо математичком индукцијом да је увек мањи од $2 - \frac{2}{\sqrt{n+1}}$, тј.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2 - \frac{2}{\sqrt{n+1}}.$$

1° *База индукције.* За $n = 1$ имамо $\frac{1}{2} < 2 - \frac{2}{\sqrt{2}}$, што се своди на $\frac{3}{4} > \frac{1}{\sqrt{2}} \ \Rightarrow\ \frac{9}{16} > \frac{1}{2}$.

2° *Индукцијска претпоставка.* Претпоставимо да тврђење важи за $n = k$:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} < 2 - \frac{2}{\sqrt{k+1}}.$$

3° *Индукцијски корак*. Испитајмо да ли важи за $n = k+1$:

$$\begin{aligned}
L(k+1) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} + \frac{1}{(k+2)\sqrt{k+1}} \\
&< 2 - \frac{2}{\sqrt{k+1}} + \frac{1}{(k+2)\sqrt{k+1}} \\
&= 2 - \frac{2k+3}{(k+2)\sqrt{k+1}} \\
&= 2 - \frac{2}{\sqrt{k+2}} \cdot \frac{\frac{(k+1)+(k+2)}{2}}{\sqrt{(k+1)\cdot(k+2)}} \leqslant 2 - \frac{2}{\sqrt{k+2}}
\end{aligned}$$

(овде смо прву неједнакост добили на основу индуктивне претпоставке, а другу из неједнакости аритметичке и геометријске средине за бројеве $k+1$ и $k+2$, тј. из $\frac{A}{G} \geqslant 1$).

На основу принципа математичке идукције смо добили да важи $\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2 - \frac{2}{\sqrt{n+1}}$ за сваки природан број n, што је и тврђење задатка.

3. Наћи све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да је

$$f(x) = \max_{y\in\mathbb{R}} (2xy - f(y)),$$

за свако $x \in \mathbb{R}$.

Решење: Нека функција f задовољава услов задатка. Онда је $f(x) \geq 2xy - f(y)$ за све $x, y \in \mathbb{R}$, па за $y = x$ добијамо да је $f(x) \geq x^2$ (за све $x \in \mathbb{R}$). Даље, из услова следи да за свако x постоји $y = y(x)$ такво да је $f(x) = 2xy(x) - f(y(x))$. Из овога и из претходне неједнакости добијамо:

$$x^2 \leq f(x) = 2xy(x) - f(y(x)) \leq 2xy(x) - y^2(x),$$

па је $(x - y(x))^2 \leq 0$, тј. $y(x) = x$. Из $f(x) = 2xy(x) - f(y(x))$ онда следи да је $f(x) = x^2$. Ова функција је решење задатка:

$$\max_{y\in\mathbb{R}} (2xy - f(y)) = \max_{y\in\mathbb{R}} (x^2 - (x-y)^2) = x^2 = f(x).$$

4. Доказати да не постоји више од $2 \cdot 5^3$ кошаркашких тимова од по 5 играча формираних од 25 ученика, тако да број заједничких играча за свака два тима није већи од 2.

Решење: Ако има x тимова са том особином, тада због услова задатка важи $x \cdot \binom{5}{3} \leq \binom{25}{3}$ тј. $x \leq \frac{\binom{25}{3}}{\binom{5}{3}} = 230 < 250 = 2 \cdot 5^3$.

5. Нека је $ABCDEF$ конвексан шестоугао код кога је $AB = BC$, $CD = DE$ и $EF = FA$. Доказати неједнакост

$$\frac{AB}{BE} + \frac{CD}{DA} + \frac{EF}{FC} \geq \frac{3}{2}.$$

Решење: Означимо са a, b и c, редом, дужине дијагонала AC, CE и EA шестоугла. Применом Птоломејеве неједнакости на четвороугао $ABCE$, налазимо да је $bAB+cBC = (b+c)AB \geq aBE$, тј. $\frac{AB}{BE} \geq \frac{a}{b+c}$. Аналогно, применом Птоломејеве неједнакости, редом, на четвороуглове $CDEA$ и $EFAC$, важи $\frac{CD}{DA} \geq \frac{b}{a+c}$ и $\frac{EF}{FC} \geq \frac{c}{a+b}$. Сада је, на основу неједнакости између аритметичке и хармонијске средине, испуњено

$$\frac{AB}{BE} + \frac{CD}{DA} + \frac{EF}{FC} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

$$= \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} + \frac{a+b+c}{a+b} - 3$$

$$= (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 3$$

$$\geq \frac{9(a+b+c)}{(b+c)+(c+a)+(a+b)} - 3 = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}.$$

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.03.2006.

Трећи разред – Б категорија

1. Нека су a, b катете и c хипотенуза правоуглог троугла ABC. Израчунати максималну вредност израза $\frac{t_a+t_b}{t_c}$, где су t_a, t_b и t_c дужине тешхишних дужи које одговарају, редом, страницама a, b и c троугла ABC.

Решење: Применом Питагорине теореме једноставно добијамо $t_a^2 = b^2 + (\frac{a}{2})^2$ и $t_b^2 = a^2 + (\frac{b}{2})^2$. Како је $t_c = \frac{c}{2}$, то је прво, на основу неједнакости између аритметичке и квадратне средине, $\frac{t_a+t_b}{2} \leq \sqrt{\frac{t_a^2+t_b^2}{2}} = \sqrt{\frac{5}{8}(a^2+b^2)} = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}$, а затим и $\frac{t_a+t_b}{t_c} \leq \frac{c\sqrt{\frac{5}{2}}}{\frac{c}{2}} = \sqrt{10}$. Дакле, максимална вредност израза $\frac{t_a+t_b}{t_c}$ је $\sqrt{10}$ и иста се достиже уколико је троугао једнакокрако правоугли, тј. за $a = b$.

2. Доказати да за свако $x \in R$ важи неједнакост $\sin^{2005} x + \cos^{2005} x + \sin^{2006} x \leq 2$. Када важи једнакост?

Решење: Користећи процену да је $\sin^2 x \geq \sin^{2005} x$, $\sin^2 x \geq \sin^{2006} x$ и $\cos^2 x \geq \cos^{2006} x$ добијамо

$$\sin^{2005} x + \cos^{2005} x + \sin^{2006} x \leq \sin^2 x + \cos^2 x + \sin^2 x \leq 1 + \sin^2 x \leq 2$$

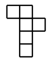
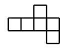
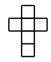
Да би вредела једнакост свуда морају бити једнакости. Због последње једнакости мора бити $\sin^2 x = 1$, односно $\sin x = 1 \vee \sin x = -1$. Провером се добија да може важити само $\sin x = 1$. Решавањем се добија да је $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, за $k \in Z$

3. Дијагонале AC и BD конвексног четвороугла $ABCD$ секу се у тачки E тако да су површине троуглова AED и BCE једнаке. Одредити меру угла ACD, ако су странице троугла ABE у односу $BE : EA : AB = 5 : 6 : 7$.

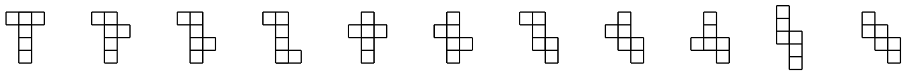
Решење: Из једнакости површина добијамо $DE \cdot AE \cdot \sin\sphericalangle DEA = CE \cdot BE \cdot \sin\sphericalangle BEC$, одакле је $DE : EB = AE : EC$ и троуглови DEC и BEA су слични, па је $\alpha = \sphericalangle ACD = \sphericalangle CAB$. Применом косинусне теореме за троугао ABE добија се

$$25t^2 = 36t^2 + 49t^2 - 84t^2 \cos\alpha$$

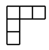
$(BE = 5t, EA = 6t, AB = 7t)$, одакле је $\cos\alpha = \frac{5}{7}$.

4. У мрежи коцке су два квадратића суседна уколико имају заједничку страницу (само једна тачка није довољна) и сви квадратићи су међусобно повезани преко суседних. Две мреже коцке су еквивалентне ако једну од друге можемо добити коришћењем ротације и/или симетрије: нпр. мреже  и  су међусобно еквивалентне, али нису еквивалентне са  . Наћи број нееквивалентних мрежа коцке ивице 1 и нацртати све такве мреже.

Решење: Постоји 11 нееквивалентих мрежа коцке.



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

Покажимо да не постоји још нека нееквивалентна мрежа коцке. Приметимо прво да у мрежи коцке не могу бити 5 или 6 квадратића у реду (тада би 1. и 5. покривали исту страну коцке). Такође мрежа не може садржати ни квадрат 2×2,  , ни  јер би опет нека 2 квадратића покривала исту страну коцке. Првих 6 мрежа са горње слике имају 4 квадратића у реду, следеће 4 имају највише 3 квадратића у реду и последња има само по 2 квадратића у реду.

5. Нека су $d_1, d_2, \ldots, d_k$ сви делиоци природног броја n, такви да је
$$1 = d_1 < d_2 < d_3 < \cdots < d_k = n.$$
Наћи све бројеве n за које је $k \geqslant 4$ и важи $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = n$.
M383

Решење: Прво докажимо да је n паран број. Претпоставимо супротно: нека је n непаран број. Тада су сви делиоци броја n непарни, па су зато d_1, d_2, d_3 и d_4 непарни. Следи да је $n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$ паран, што је противно полазној претпоставци. Дакле, n је паран број, па је $d_2 = 2$. Из једнакости $n = 1^2 + 2^2 + d_3^2 + d_4^2$ следи да је један од бројева d_3 и d_4 паран а други непаран. Разматраћемо два случаја.
Први случај: $d_3 = 2a$, $a > 1$. Како је a делилац броја n мањи од d_3, то је $a = 2$. Дакле, $d_3 = 4$. Како је $n = 1^2+2^2+4^2+d_4^2 = 21+d_4^2$, то n није дељиво са 4. Контрадикција!
Други случај: $d_4 = 2a$, $a > 1$. Како је $a < d_4$ и $a \mid n$, то је $a = d_2 = 2$ или $a = d_3$. У првом случају било би $d_4 = 4$, $d_3 = 3$ и $n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$. Како 4 не дели 30, овај случај отпада. Преостаје да је $a = d_3$. У том случају имамо да је $n = 1^2 + 2^2 + d_3^2 + 4d_3^2 = 5(1 + d_3^2)$. Како $d_3 \mid n$ и бројеви d_3 и $1 + d_3^2$ су узајамно прости, следи да је $d_3 = 5$, па је $d_4 = 10$ и $n = 1^2 + 2^2 + 5^2 + 10^2 = 130$. Лако се проверава да су 1, 2, 5 и 10 четири најмања делиоца броја 130. Према томе једини број који задовољава тражене услове је 130.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.03.2006.

Четврти разред – А категорија

1. Колико постоји правоуглих троуглова чија су темена тачке целобројне решетке $3 \times n$ (где је $n \geqslant 5$)?

Решење: Означимо са x праву која садржи 2. врсту мреже, са y праву нормалну на x која је такође оса симетрије дате мреже, затим у правоуглим троугловима теме правог угла са C.

Имамо следеће случајеве:

1° 2°а) 2°б) 2°б) 2°в) 2°г) 3°а) 3°

1° Троуглова са катетама паралелним координатним осама има

$$\binom{3n}{1} \cdot 2 \cdot (n-1) = 6n^2 - 6n,$$

јер теме C одређујемо на $\binom{3n}{1}$, 2 избора за теме по вертикали (у друге 2 врсте) и $n-1$ по хоризонтали (у преосталих $n-1$ колона).

2° Правоуглих троуглова чије катете заклапају углове од 45° са координатним осама има 4 врсте:

а) једнакокраки катета дужине $\sqrt{2}$, код којих је теме C у 1. или 3. врсти и има их

$$2 \cdot (n-2) = 2n - 4 \qquad \text{за} \quad n \geqslant 2;$$

б) једнакокраки катета дужине $\sqrt{2}$, код којих је теме C у 2. врсти и има их

$$2 \cdot (n-2) + 2 \cdot (n-1) = 4n - 6 \qquad \text{за} \quad n \geqslant 2;$$

в) једнакокраки катета дужине $2\sqrt{2}$ и има их

$$2 \cdot (n-4) = 2n - 8 \qquad \text{за} \quad n \geqslant 4;$$

г) разнокраки катета дужина $\sqrt{2}$ и $2\sqrt{2}$ и има их

$$4 \cdot (n-3) = 4n - 12 \qquad \text{за} \quad n \geqslant 3.$$

3° Правоуглих троуглова чија је једна катета дужине $\sqrt{5}$ има 2 врсте:

а) једнакокраки катета дужине $\sqrt{5}$ и има их

$$4 \cdot (n-3) = 4n - 12 \qquad \text{за} \quad n \geqslant 3;$$

б) разнокраки катета дужина $\sqrt{5}$ и $2\sqrt{5}$ и има их

$$4 \cdot (n-5) = 4n - 20 \qquad \text{за} \quad n \geqslant 5.$$

Када имамо $2\cdot$ то значи да теме C можемо изабрати и у 1. и у 3. врсти, тј. имамо симетрију у односу на праву x, а колону за теме C можемо изабрати на $(n-a)$ начина, сем у 2°б) где не бирамо теме C него средиште хипотенузе и за први сабирак је $2\cdot$ за симетрију у односу на x, а за други у односу на y. Када имамо $4\cdot$ тада имамо симетрије и у односу на x и на y.

Коначно добијамо да има $6n^2+14n-62$ правоуглих троуглова.

2. Дат је оштроугли троугао ABC. Нека је I центар уписаног круга, O центар описаног круга и H ортоцентар троугла $\triangle ABC$. Права AI сече страницу BC у A', а права BI сече страницу AC у B'. Права OH сече страницу AC у P, а BC у Q. Ако је четвороугао $CA'IB'$ конвексан и тетиван, доказати да је $PQ = AP + BQ$.

Решење: Из тетивности $CA'IB'$ закључујемо да је $180^o = \gamma + \sphericalangle B'IA' = \gamma + \sphericalangle AIB = \gamma + 180^o - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$, одакле добијамо да је $\gamma = 60^o$. Четвороугао $ABOH$ је тетиван, јер је $\sphericalangle AOB = 2\gamma = 120^o$ (као централни угао) и $\sphericalangle AHB = 180^o - \sphericalangle BAH - \sphericalangle ABH = \alpha + \beta = 120^o$. Зато је $\sphericalangle PHA = 180^o - \sphericalangle AHO = \sphericalangle OBA$. У једнакокраком троуглу AOB је $\sphericalangle OBA = 90^o - \gamma$, а како је $AH \perp BC$, онда је и $\sphericalangle PAH = 90^o - \gamma$. Следи да је троугао APH једнакокрак и $AP = PH$. Аналогно показујемо да је $QB = QH$ и најзад је $PQ = PH + HQ = AP + BQ$.

3. Доказати да за сваки природан број n постоји природан број x такав да је $2^x - x$ дељиво са n

Решење: Тврђење доказујемо индукцијом по n. За $n = 1$ важи; претпоставимо да важи за све $n < n_0$, где је $n_0 \geq 2$ неки природан број. Ставимо $x = 2^y$. Тада је по Ојлеровој теореми $2^x - x = 2^{2^y} - 2^y$ дељиво са n_0 ако је $2^y - y$ дељиво са $\varphi(n_0)$ и y је довољно велико (на пример, $y \geq n_0$). Такав природан број y постоји према индукцијској претпоставци, одакле следи постојање траженог беоја x.

4. Ако су x_i $(i = 1, 2, \ldots, 48)$ нуле полинома $P(x) = 18x^{48} + 3x + 2006$, израчунати $\sum_{i=1}^{48} \frac{x_i}{1+x_i}$.

Решење: Приметимо да $x_i \notin \{-1, 0\}$ и да је $\frac{x_i}{1+x_i} = \frac{1}{1+x_i^{-1}}$. Користићемо следеће две очигледне чињенице:

(а) Ако су $y_i \neq 0$ нуле полинома $A(x)$ n-тог степена, онда су y_i^{-1} нуле полинома $x^n A(x^{-1})$.

(б) Ако су y_i нуле полинома $A(x)$, онда су y_i+1 нуле полинома $A(x-1)$.

Из (а) следи да су x_i^{-1} нуле полинома $Q(x) = x^{48}P(x^{-1})$, из (б) – да су $1 + x_i^{-1}$ нуле полинома $R(x) = Q(x-1)$. Коначно, из (а) следи да су $\frac{1}{1+x_i^{-1}}$ нуле полинома

$$\begin{aligned} x^{48}R(x^{-1}) &= x^{48}Q(x^{-1}-1) = x^{48}(x^{-1}-1)^{48}P((x^{-1}-1)^{-1}) \\ &= 18x^{48} + 3x(1-x)^{47} + 2006(1-x)^{48} \\ &= 2021x^{48} - 96147x^{47} + \cdots + 2006 \end{aligned}$$

Из Виетових формула за овај полином, добијамо да је тражени збир једнак $\frac{96147}{2021}$.

5. Одредити све функције $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ такве да је $f(f(x)+y+1) = x + f(y) + 1$ за свака два цела броја x и y.

Решење: Заменом $x = 0$ добијамо $f(f(0)+y+1) = f(y)+1$. Сада имамо $x + f(y) + 1 = f(f(x)+y+1) = f[(f(x)+1)+y] = f[f(f(0)+x+1)+(y-1)+1] = f(y-1)+(f(0)+x+1)+1$ одакле закључујемо да је

$$f(y) = f(y-1) + f(0) + 1. \tag{1}$$

Индукцијом добијамо да је $f(n) = f(0) + n(f(0)+1)$ за све целе бројеве n. Ако ставимо $y = 0$ у (1) добијамо да је $f(-1) = -1$ и заменом $y = -1$ у полазну једначину добијамо $f(f(x)) = x$. Ако применимо функцију f и на леву и на десну страну једнакости $f(n) = f(0) + n(f(0)+1)$ добијамо да је $n = f(0) + [f(0) + n(f(0) + 1)](f(0)+1)$ што је еквивалентно са $n = f(0)(f(0)+2) + n(f(0)+1)^2$ а то може бити задовољено за све целе бројеве n само ако је $f(0) = 0$ или $f(0) = -2$. У првом случају добијамо да је $f(n) = n$ а у другом $f(n) = -n-2$. Једноставно се проверава да обе функције задовољавају услов задатка.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.03.2006.

Четврти разред – Б категорија

1. Доказати да за сваки природан број n важи неједнакост: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<2-\frac{2}{\sqrt{n+1}}$.

Решење: Означимо са $L(n)$ израз на левој страни и покажимо математичком индукцијом да је увек мањи од $2-\frac{2}{\sqrt{n+1}}$, тј.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<2-\frac{2}{\sqrt{n+1}}.$$

1° *База индукције.* За $n=1$ имамо $\frac{1}{2}<2-\frac{2}{\sqrt{2}}$, што се своди на $\frac{3}{4}>\frac{1}{\sqrt{2}} \;\Rightarrow\; \frac{9}{16}>\frac{1}{2}$.

2° *Индукцијска претпоставка.* Претпоставимо да тврђење важи за $n=k$:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}}<2-\frac{2}{\sqrt{k+1}}.$$

3° *Индукцијски корак.* Испитајмо да ли важи за $n=k+1$:

$$\begin{aligned}
L(k+1) &= \frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}}+\frac{1}{(k+2)\sqrt{k+1}}\\
&< 2-\frac{2}{\sqrt{k+1}}+\frac{1}{(k+2)\sqrt{k+1}}\\
&= 2-\frac{2k+3}{(k+2)\sqrt{k+1}}\\
&= 2-\frac{2}{\sqrt{k+2}}\cdot\frac{\frac{(k+1)+(k+2)}{2}}{\sqrt{(k+1)\cdot(k+2)}}\leqslant 2-\frac{2}{\sqrt{k+2}}
\end{aligned}$$

(овде смо прву неједнакост добили на основу индуктивне претпоставке, а другу из неједнакости аритметичке и геометријске средине за бројеве $k+1$ и $k+2$, тј. из $\frac{A}{G}\geqslant 1$).

На основу принципа математичке идукције смо добили да важи $\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<2-\frac{2}{\sqrt{n+1}}$ за сваки природан број n, што је и тврђење задатка.

2. Наћи ону вредност $a>1$ за коју једначина $a^x=x$ има тачно једно решење.

Решење: То ће се десити кад график финкције $y = a^x$ додирне праву $y = x$. Тада мора бити $(a^x)' = 1$, тј. $a^x \ln a = 1$. Из ове једначине и из полазне лако налазимо $a = e^{1/e}$.

3. Одредити углове троугла ако за његове углове и странице важи

$$a : \alpha = b : \beta = c : \gamma$$

(a, b и c су редом странице наспрам углова α, β и γ).

Решење: Из синусне теореме имамо да је $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$. Одавде, користећи дати однос углова и страница, имамо

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{\sin\beta}{\beta} = \frac{\sin\gamma}{\gamma}.$$

Посматрајмо функцију $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ на интервалу $(0, \pi)$. Доказаћемо да је она опадајућа. Налазимо да је $f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$. Нека је $g(x) = x\cos x - \sin x$. Како је $g'(x) = -x\sin x < 0$ на интервалу $(0, \pi)$, то је функција $g(x)$ опадајућа на њему и како је $g(0) = 0$ имамо да је $g(x) < 0$ за свако $x \in (0, \pi)$ (овде смо искористили и непрекидност функције $g(x)$ на $[0, 2\pi)$). Зато је $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} < 0$ на $(0, \pi)$, те је функција $f(x)$ опадајућа на овом интервалу, што смо и хтели да покажемо. Отуда, користећи чињеницу да је $f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma)$ и $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$, закључујемо да је $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$. Дакле, једини троугао за чије углове и странице важи дати однос је једнакостранични троугао.

4.

Решење:

5. За природан број кажемо да је палиндром ако је једнак броју записаном истим цифрама у обрнутом редоследу.

(a) Наћи највећи петоцифрен палиндром који је дељив са 101.

(b) Наћи највећи број узастопних петоцифрених бројева међу којима нема палиндрома.

Решење:

(a) Било који петоцифрени палиндром $\overline{abcba}$ може се приказати у облику

$$\overline{abcba} = 10\,001a + 1\,010b + 100c = 101(99a + 10b + c) + 2a - c.$$

То значи да је тај палиндром дељив са 101 ако и само ако је $2a - c = 0$ (јер је за било које цифре a и c испуњено $|2a - c| < 101$). Једначина $2a = c$ имплицира да је $a \leqslant 4$. Пошто тражимо највећи број, узећемо да је $a = 4$. Тада је $c = 8$. Како за цифру b немамо никакве услове, то ћемо узети $b = 9$ да бисмо добили највећи могући број. Дакле, тражени број је 49 894.

(б) Међу следећих 109 узастопних петоцифрених бројева

$$10\,902,\ 10\,903,\ \ldots,\ 10\,999,\ 11\,000,\ \ldots,\ 11\,009,\ 11\,010$$

нема палиндрома. Најмањи и највећи петоцифрени палиндроми су редом 10 001 и 99 999. Пре броја 10 001 је само један петоцифрен број, а иза броја 99 999 нема више петоцифрених бројева. Показаћемо да после било ког петоцифреног палиндрома x, $x \neq 99\,999$, постоји други петоцифрен палиндром облика $x+100$ или $x+110$ или $x+11$. Означимо $x = \overline{abcba}$. Ако је $c \neq 9$, тада је број

$$x + 100 = \overline{ab(c+1)ba}$$

палиндром. Ако је $c = 9 \neq b$, број

$$x + 110 = \overline{a(b+1)0(b+1)a}$$

је палиндром, и коначно ако је $c = b = 9$ (наравно, $a \neq 9$) број

$$x + 11 = \overline{(a+1)000(a+1)}$$

је палиндром.

Према томе, највећи могући број узастопних петоцифрених бројева међу којима нема палиндрома је 109.