**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**Друштво математичара Србије**

## ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

## 15.3.2014.

### Први разред – А категорија

**1.** За бројеве $a, b, c, x, y$ и $z$ важи $\{a, b, c\} = \{x, y, z\} = \{15, 3, 2014\}$. Да ли број

$$a^{b^c} + x^{y^z}$$

мора бити сложен?
(За $m, n, k \in \mathbb{N}$ је са $m^{n^k}$ означен број $m^{(n^k)}$.)

**2.** Нека су $a$, $b$ и $c$ странице, $S$ површина, $R$ полупречник описане кружнице и $M$ тачка у унутрашњости троугла $ABC$. Означимо са $d_a$, $d_b$ и $d_c$ растојања тачке $M$ од правих које садрже странице троугла $ABC$. Доказати да важи неједнакост

$$2S \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{R}\right) > d_a + d_b + d_c.$$

**3.** На столу се налази гомила са $n$ жетона. Два играча, А и Б, наизменично играју, при чему играч А игра први. У сваком потезу играч или узима један жетон са неке од гомила или дели неку од гомила на неколико гомила (барем две) са међусобно једнаким бројем жетона (ако играч узме последњи жетон са гомиле она престаје да постоји). Победник је играч који узме последњи жетон са стола. За које вредности броја $n$ играч А има победничку стратегију, а за које вредности броја $n$ играч Б има победничку стратегију?

**4.** Одредити све полиноме $R(x)$ чији су сви коефицијенти из скупа $\{-1, 1\}$ и за које важи $R(3) = 130$ и $R(-2) = -45$.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**Друштво математичара Србије**

## ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

## 15.3.2014.

### Други разред – А категорија

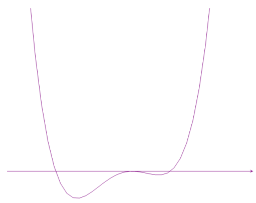
**1.** Да ли постоји коначно или бесконачно много природних бројева $m$ за које постоје природни бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_{2014}$ такви да је

$$a_1! + a_2! + \ldots + a_{2014}! = m!\,?$$

**2.** Перица је замислио три реална броја $a$, $b$ и $c$ и у свесци скицирао график функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ за коју је

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)(cx^2 + bx + a).$$

Његов млађи брат Микица је искористио прилику када Перица није био код куће и са скице избрисао $y$ осу. Наредног дана Перица је приметио да његовој скици недостаје $y$ оса. Покушао је да се присети функције чији је график скицирао. Успео је да се сети да је функција облика $f(x) = (ax^2 + bx + c)(cx^2 + bx + a)$, али није успео да се сети вредности бројева $a$, $b$ и $c$. Да ли је могуће да Перица конструише $y$ осу, ако је у свесци пронашао скицу приложену на слици? Претпоставља се да је Перица првобитно тачно скицирао график функције.



**3.** Нека је $M$ средиште лука $BC$ описане кружнице $k$ троугла $ABC$ који не садржи тачку $A$. Споља приписана кружница троугла $ABC$ наспрам темена $A$, са центром $S$, додирује страницу $BC$ у тачки $D$. Ако права $MD$ сече кружницу $k$ у тачки $P$ ($P \neq M$) доказати да је $\sphericalangle APS = 90^\circ$.

**4.** У низу је дато $n \geqslant 3$ сијалица. Испод сваке сијалице налази се прекидач. Притиском на прекидач испод сијалице са редним бројем $i$, $1 < i < n$, мења се стање сијалица са редним бројевима $i-1$, $i$ и $i+1$; притиском на прекидач испод прве сијалице мења се стање прве и друге сијалице, док се притиском на прекидач испод сијалице са редним бројем $n$ мења стање сијалица са редним бројевима $n-1$ и $n$. Одредити све природне бројеве $n$ за које је без обзира на почетно стање сијалица могуће у коначно много потеза добити стање у којем су све сијалице упаљене.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**Друштво математичара Србије**

**ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ**

# 15.3.2014.

**Трећи разред – А категорија**

**1.** У троуглу $ABC$ је $AB = AC$. Тачке $D$, $E$ и $F$ изабране су на страницама $BC$, $CA$ и $AB$, редом, тако да праве $EF$ и $BC$ нису паралелне и да важи $\sphericalangle EDF = \sphericalangle ABC$. Доказати да права $BC$ додирује описану кружницу троугла $DEF$ ако и само ако је $D$ средиште странице $BC$.

**2.** За непразне подскупове $A$ и $B$ скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ пишемо $A < B$ ако је сваки елемент скупа $A$ мањи од сваког елемента скупа $B$. Доказати да је број парова непразних подскупова $(A, B)$ скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ таквих да је $A < B$ једнак $(n-2) \cdot 2^{n-1} + 1$.

**3.** Одредити све $n \in \mathbb{Z}$ такве да се из скупа $\{n, n+1, \ldots, n+2014\}$ може избацити један број, тако да се остали бројеви могу поделити на два дисјунктна скупа $A$ и $B$, за које је $|A| = |B|$ и

$$\sum_{k \in A} k^2 = \sum_{k \in B} k^2.$$

**4.** Одредити све природне бројеве $n$ такве да

$$3^n - 2^n \mid 6^n + 3^n + 1.$$

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**Друштво математичара Србије**

## ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

## 15.3.2014.

### Четврти разред – А категорија

**1.** За целе бројеве $a$, $b$ и $c$ бројеви $a+b+c$, $a^2+b^2+c^2$ и $a^3+b^3+c^3$ дељиви су са 2013. Доказати да

$$2013^3 \mid abc(a-b)(b-c)(c-a).$$

**2.** Дати су позитивни бројеви $a$, $b$ и $c$ такви да важи $ab+bc+ca=3$. Доказати неједнакост

$$\frac{1}{4+(a+b)^2}+\frac{1}{4+(b+c)^2}+\frac{1}{4+(c+a)^2}\leqslant\frac{3}{8}\,.$$

**3.** Права $\ell$ садржи средиште $M$ странице $BC$ троугла $ABC$ и сече праве $AB$ и $AC$ у тачкама $D$ и $E$, редом. Нека је $K$ средиште дужи $DE$. Доказати да растојање од тачке $D$ до праве $AK$ није веће од $BC/2$.

**4.** На папиру је нацртан правилан шестоугао. Аца и Воја наизменично бирају по једну тачку са руба тог многоугла, при чему Аца тачку увек боји плавом, а Воја црвеном бојом (свака тачка може бити одабрана највише једном). Аца игра први. Игру добија играч који први оствари да међу тачкама које је до тада обојио постоје три које чине темена једнакостраничног или темена једнакокрако правоуглог троугла. Да ли неки од играча има победничку стратегију?

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**Друштво математичара Србије**

## ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

## 15.3.2014.

### Први разред – Б категорија

**1.** Нека је $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

$$p(x) = ax^{2015} + bx^{2013} + cx^{11} + dx^3 + 16x^2 + 3$$

и $p(8) = 2014$. Одредити могуће вредности $p(-8)$.

**2.** Ако за реалне бројеве $a, b, c, x, y$ и $z$ важи $ax + by + cz = 0$ и ако је израз

$$\frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{bc(y-z)^2 + ca(z-x)^2 + ab(x-y)^2}$$

дефинисан, доказати да његова вредност не зависи од $x, y$ и $z$.

**3.** У скупу природних бројева решити једначину

$$m^m + (mn)^n = 2014.$$

**4.** Нека су $AD$ и $BE$ висине оштроуглог троугла $ABC$. Права $DE$ сече описану кружницу троугла $ABC$ у тачкама $M$ и $N$. Доказати да је $CM = CN$.

**5.** Посматрајмо све речи дужине 6 састављене од слова азбуке у којима су сва слова различита и поређана у азбучном поретку (нпр. АБВГЗШ је таква реч, а ГКЗХИЦ није). Да ли у свим оваквим речима има више појава слова М или слова С?

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**Друштво математичара Србије**

## ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

## 15.3.2014.

### Други разред – Б категорија

**1.** Да ли постоји комплексан број $z$ који није реалан такав да су бројеви
$$z^{15} - \frac{1}{z^{15}}, \quad z^3 - \frac{1}{z^3} \quad \text{и} \quad z^{2014} - \frac{1}{z^{2014}}$$
реални?

**2.** Нека је $BD$ висина троугла $ABC$. Тачке $M$ и $N$ изабране су у равни троугла $ABC$ тако да важи $AN \perp AB$, $CM \perp BC$, $AN = DC$ и $CM = AD$. Доказати да је $BM = BN$.

**3.** Одредити све природне бројеве $m$, $n$ и $p$ такве да важи
$$m\,! + n\,! = 5^p.$$
(За $k \in \mathbb{N}$ је $k\,! = k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.)

**4.** На папиру је нацртана кружница. Аца и Воја наизменично бирају по једну тачку са кружнице, при чему Аца тачку увек боји плавом, а Воја увек црвеном бојом (свака тачка може бити одабрана највише једном). Аца почиње игру. У игри побеђује играч који први оствари да међу тачкама које је до тада обојио постоје три које чине темена једнакостраничног или темена једнакокрако правоуглог троугла. Да ли неки од играча може играти тако да победи без обзира на то како игра други играч?

**5.** Одредити број различитих начина да топ стигне од левог доњег до десног горњег поља табле $3 \times 7$, уколико је дозвољено да се креће само удесно и нагоре.
(Топ је фигура која се у једном потезу помера са поља $A$ на поље које се налази у истој врсти или колони као поље $A$. Два кретања топа су различита уколико се у другој кретњи топ зауставља на барем једно поље на које се није зауставио у првој кретњи.)

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**Друштво математичара Србије**

# ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

# 15.3.2014.

## Трећи разред – Б категорија

**1.** Нека је $n$ природан број. Одредити најмањи природан број $a$ за који систем једначина

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & \dots & + & x_n & = & a \\ {x_1}^{2014} & + & {x_2}^{2014} & + & \dots & + & {x_n}^{2014} & = & a \end{array}$$

нема целобројних решења.

**2.** У комплексној равни дат је једнакостраничан троугао. Ако једном темену овог троугла одговара комплексан број $\sqrt{3}+5i$, а центру троугла комплексан број $2i$, одредити комплексне бројеве који одговарају преосталим теменима троугла.

**3.** Наћи све природне бројеве $n$ за које постоји природан број $x$ тако да

$$2014 \mid (3x+16)^n - 2015.$$

**4.** У равни су дате праве $p$, $q$ и $r$ и тачке $P_1, P_2, P_3 \in p$, $Q_1, Q_2, Q_3 \in q$ и $R_1, R_2, R_3 \in r$ такве да је $P_2$ између $P_1$ и $P_3$, $Q_2$ између $Q_1$ и $Q_3$, $R_2$ између $R_1$ и $R_3$, при чему важи

$$P_1P_2 : P_2P_3 = Q_1Q_2 : Q_2Q_3 = R_1R_2 : R_2R_3.$$

Доказати да су тежишта троуглова $P_1Q_1R_1$, $P_2Q_2R_2$ и $P_3Q_3R_3$ колинеарна.

**5.** У низ је поређано 2014 сијалица. Испод сваке сијалице налази се прекидач. Притиском на прекидач испод сијалице са редним бројем $i$, за $1 < i < 2014$, мења се стање сијалица са редним бројевима $i-1$, $i$ и $i+1$; притиском на прекидач испод прве сијалице мења се стање прве и друге сијалице, док се притиском на прекидач испод сијалице са редним бројем 2014 мења стање сијалица са редним бројевима 2013 и 2014.
а) Ако су на почетку све сијалице угашене да ли се низом потеза може добити да све сијалице буду упаљене?
б) Ако је на почетку једна сијалица упаљена, а преосталих 2013 угашено, да ли се без обзира која је сијалица упаљена може доћи до стања у којем су све сијалице упаљене?

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**Друштво математичара Србије**

## ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

## 15.3.2014.

### Четврти разред – Б категорија

**1.** Доказати да је број

$$5^n(5^n+1)-6^n(3^n+2^n)$$

дељив са 13 за сваки природан број $n$.

**2.** Раван $\pi$ пресеца бочне ивице правилне четворостране пирамиде у тачкама $A$, $B$, $C$ и $D$ које се налазе на удаљеностима $a$, $b$, $c$ и $d$, редом, од врха пирамиде. Доказати да важи једнакост

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}\,.$$

**3.** Доказати да је за сваки природан број $n$ већи од 1 број

$$n\cdot 2^{n-1}+(n-1)\cdot 2^{n-2}+\ldots+3\cdot 2^2+2\cdot 2^1$$

дељив са $2^n$.

**4.** Дат је једнакостранични троугао. Колико има елипси које се могу описати око датог троугла?

**5.** Три математичара имају шешире на којима су написани неки природни бројеви. Њима је познато да је један од бројева једнак збиру друга два броја, и при томе сваки математичар види бројеве исписане на шеширима друге двојице, али не и на свом. Први каже: „Ја не знам који је број на мом шеширу”, на шта други изјављује: „Ни ја не знам који је број на мом”. Затим први констатује: „Ја сада знам који је број на мом шеширу”, а други закључује: „Онда на мом шеширу мора бити број 2014”. Који су бројеви написани на шеширима?

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.