Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

23. фебруар 2019.

Први разред – А категорија

1. У скупу целих бројева решити једначину

$$6x^3 + 7y^2 + 8z^3 = 66677888.$$

2. Дат је тетиван петоугао $ABCDE$. Нека су тачке F, G, H и I средишта дужи BC, CD, DE и EA, респективно. Нека се праве FG и HI секу у тачки J, а праве AC и HI у тачки K. Доказати да се тачка K налази на кружници описаној око $\triangle FCJ$.

3. Колико решења има једначина

$$x - 2019\{x\} = 2019$$

у скупу реалних бројева? (За реалан број x, са $\lfloor x \rfloor$ означавамо највећи цео број који није већи од x, а са $\{x\}$ означавамо вредност $x - \lfloor x \rfloor$.)

4. Дати су конвексни четвороуглови $ABCD$ и $PQRS$, при чему темена четвороугла $PQRS$ леже на страницама или у унутрашњости четвороугла $ABCD$. Да ли збир дијагонала четвороугла $PQRS$ може бити већи од збира дијагонала четвороугла $ABCD$?

5. Два играча наизменично уписују један од бројева 473, 523, 573, 623, 673, 723, 773, 823 или 873 у неко слободно поље таблице 3×3, при чему сваки број може бити искоришћен само једном. Притом први играч у првом потезу не сме уписати број у централно поље. Игра се завршава када један од играча добије збир 2019 у било којој врсти, колони или дијагонали чија су сва три поља попуњена, и тада тај играч побеђује. Уколико се цела таблица попуни а нико не оствари тај збир, победник је други играч. Који играч има победничку стратегију?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

23. фебруар 2019.

Други разред – А категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину:

$$\frac{\sin x - \sqrt{\sin x}}{\cos x - \sqrt{\cos x}} = 1.$$

2. Одредити максималан број тачака у равни међу којима сваке три чине темена правоуглог троугла.

3. Да ли постоје природни бројеви m и n за које важи $n \leqslant 2019$ и

$$\left\lfloor \frac{am}{n} \right\rfloor = \lfloor a\pi \rfloor \quad \text{за све } a = 1, 2, \ldots, 2019 \quad ?$$

(За реалан број x, са $\lfloor x \rfloor$ означавамо највећи цео број који није већи од x.)

4. У скупу ненегативних реалних бројева решити систем једначина:

$$a\sqrt{b} - c = a;$$
$$b\sqrt{c} - a = b;$$
$$c\sqrt{a} - b = c.$$

5. У школи се одржавају такмичења из m предмета. Из сваког предмета се такмичи mk ученика (исти ученик се може такмичити из више предмета). Доказати да се ученици могу разместити у k учионица на такав начин да у свакој учионици постоји бар по један такмичар из сваког од постојећих m предмета.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

23. фебруар 2019.

Трећи разред – А категорија

1. За све $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ доказати неједнакост:

$$\cos(\sin x) > \sin(\cos x).$$

2. Квадратна таблица формата 6×6 је попуњена бројевима ± 1 на такав начин да, за свако поље таблице, производ бројева уписаних у том пољу и свим њему суседним пољима износи 1. (Под суседним пољима подразумевамо поља која имају бар једно заједничко теме.) Доказати да је у сваком пољу таблице уписан број 1.

3. За дати скуп тачака у простору S, означимо са $\ell(S)$ скуп свих тачака у простору које леже на бар једној правој кроз две тачке скупа S. Нека се скуп S састоји од четири тачке које нису све у истој равни. Доказати да је број тачака које не припадају скупу $\ell(\ell(S))$ коначан и одредити тај број.

4. Наћи све непарне природне бројеве n за које важи

$$n = 2019\,\underbrace{\varphi(\varphi(\ldots\varphi}_{10\text{ пута}}(n)\ldots)).$$

5. За позитивне реалне бројеве a, b и c доказати неједнакост:

$$\sqrt{\frac{a+2b+3c}{3a+2b+c}} + \sqrt{\frac{b+2c+3a}{3b+2c+a}} + \sqrt{\frac{c+2a+3b}{3c+2a+b}} \geqslant 3.$$

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

23. фебруар 2019.

Четврти разред – А категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину:

$$2^{x^2+2x-4x^4} = \frac{x^2}{x+1}.$$

2. У тетивном четвороуглу $ABCD$ важи $AB = 3$, $BC = 6$ и $\triangle ACD$ је једнакостраничан. Нека је O центар описане кружнице око четвороугла $ABCD$, а E пресек дијагонала AC и BD. Израчунати $\measuredangle DOE$.

3. Нека је A скуп природних бројева такав да сви бројеви мањи од 256, као и сви степени двојке, припадају скупу A (преостали природни бројеви могу а не морају припадати скупу A). Посматрајмо сада бесконачан низ који се добија ако све бројеве из скупа A претворимо у бинарни запис и испишемо их један иза другог у растућем поретку. Доказати да у овом бесконачном низу постоји 2019 узастопних цифара од којих је тачно 1000 јединица.

4. Дата је диференцијабилна функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ која има бар две различите реалне нуле. Доказати да функција $2019f(x) + f'(x)$ има бар једну реалну нулу.

5. На скупу природних бројева већих од 9 дефинишемо функцију f на следећи начин: ако је $\overline{c_1c_2\ldots c_s}$ $(s \geqslant 2)$ декадни запис броја n, тада је $f(n)$ природан број који се добија заменом свих појава цифре c_1 у броју n цифром c_2, и заменом свих појава цифре c_2 у броју n цифром c_1; уколико се након ове операције појаве водећа нула у резултујућем броју, она се брише. (На пример, $f(2375342) = 3275243$ и $f(502305) = 52350$.) Наћи све природне бројеве који се могу јавити као вредност израза $\dfrac{n}{f(n)}$.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

23. фебруар 2019.

Први разред – Б категорија

1. Одредити скупове A и B за које важи следећих пет особина:

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
- $2 \in A \setminus B$;
- $3 \in B \setminus A$;
- $A \cap \{4, 5, 6\} = \varnothing$;
- $B \cap \{1\} = \varnothing$.

2. Бетмен хоће да провали шифру Едварда Нигме. Њему је познато да шифра представља неку пермутацију слова у изразу `TRICKORTREAT`, и да су притом прво и последње слово шифре једнаки. Колико укупно постоји могућности за такву шифру?

3. У тетивном четвороуглу $ABCD$ важи $\measuredangle ADB = 50^\circ$ и $\measuredangle CDB = 60^\circ$. На правој AC је одабрана тачка M за коју важи $\measuredangle AMB = 70^\circ$. Да ли се тачка M налази између тачака A и C, или је изван дужи AC?

4. Доказати да је број $10^{2019} - 9991$ дељив са 81.

5. Из једног темена оштроуглог троугла повучена је висина, из другог тежишна дуж, а из трећег симетрала унутрашњег угла. Те три праве имају три пресечне тачке. Доказати да троугао коме су те тачке темена не може бити једнакостраничан.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

23. фебруар 2019.

Други разред – Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину:

$$\frac{5x}{x^2+3x+6}+\frac{7x}{x^2+7x+6}=1.$$

2. У конвексном четвороуглу $ABCD$ важи $AB = BC = CD$, а његове дијагонале се секу у тачки O. Ако важи $2\measuredangle AOD = \measuredangle BAD + \measuredangle CDA$, доказати да је $ABCD$ ромб.

3. Три домаћице Зока, Јока и Цока су на пијаци добиле 9 затворених боца с млеком, и у њима је, редом: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23 и 26 децилитара млека. На колико начина оне могу поделити ове боце између себе (без отварања боца), а да при томе свака добије исти број боца и исту количину млека?

4. У скупу реалних бројева решити једначину:

$$\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-3}.$$

5. Нека је a природан број који има 2019 цифара и дељив је са 9. Нека је b збир цифара броја a, нека је c збир цифара броја b, и нека је d збир цифара броја c. Одредити број d.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

23. фебруар 2019.

Трећи разред – Б категорија

1. Израчунати:

$$\operatorname{arcctg} 5 + \operatorname{arctg} \frac{2}{3}.$$

(Решење приказати у облику експлицитне бројевне вредности изражене у степенима или радијанима.)

2. Наћи све тројке (p, q, r) простих бројева за које важи

$$p^2 - qr = 2500.$$

3. Решити неједначину:

$$x^2 - 2x + 3 \leqslant \sqrt{4 - x^2}.$$

4. У конвексном четвороуглу $ABCD$ дужи које спајају средишта наспрамних ивица имају дужине 2 и 3 и међусобно заклапају угао од $45°$. Израчунати површину четвороугла $ABCD$.

5. У сваком темену правилног n-тоугла је уписан број 1 или -1, при чему нису свих n бројева једнаки. Производ бројева уписаних у ма која 3 узастопна темена износи -1. Одредити збир свих уписаних бројева за:

a) $n = 6$;
b) $n = 2019$.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

23. фебруар 2019.

Четврти разред – Б категорија

1. У оштроуглом $\triangle ABC$ углови код темена A, B и C означени су са α, β и γ, редом. Ако важи

$$4\sin\alpha + 5\cos\beta = 6$$

и

$$5\sin\beta + 4\cos\alpha = 5,$$

одредити γ.

2. Нека је D скуп свих реалних бројева за које је израз

$$\sqrt{\log_2\left(\cos\frac{\pi x}{\sqrt{2}}\right)}.$$

дефинисан. Означимо

$$A = \min_{x\in D}|2019 - x^2|.$$

Доказати да је A природан број и да је прост.

3. Да ли постоји природан број n за који важи

$$361 \mid n^2 + 4n - 15 \quad ?$$

4. У месту Доње Зуце сваки телефонски број има пет цифара које су поређане у строго растућем или строго опадајућем поретку, и притом прва цифра није 0. Колико максимално телефонских бројева може постојати у том месту?

5. Дат је паралелограм $ABCD$ са оштрим углом код темена A. На правима AB и BC су уочене, редом, тачке L и K различите од тачке B, такве да важи $KA = AB$ и $LC = CB$. Доказати да је петоугао $AKLCD$ тетиван.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.