

**Министарство просвете и спорта Републике Србије  
Друштво математичара Србије**

**ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ**

**28.01.2006.**

**Први разред – А категорија**

1. На колико начина се 3 топа могу поставити на шаховску таблу димензија  $6 \times 2006$  тако да се узајамно не туку (тј. два топа се не могу истовремено наћи у истој врсти или истој колони)?
2. Одредити највећи заједнички делилац бројева  $2^{2006} - 1$  и  $2^{2004} - 1$ .
3. Збир 49 природних бројева једнак је 999. Наћи највећу могућу вредност њиховог највећег заједничког делиоца.
4. Одредити углове једнакокраког троугла у коме је дужина симетрале угла на основици једнака двострукој дужини висине која одговара основици.
5. Може ли се једнакостранични троугао поделити (нпр. маказама исећи!) на 2006 једнакостраничних троуглова?

Време за рад 180 минута.  
Задатке детаљно образложити.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ  
**28.01.2006.**

**Први разред – Б категорија**

1. Одредити број деветоцифрених бројева деливих са 225, код којих су све цифре различите а цифра стотина им је 7.
2. На колико начина се 3 топа могу поставити на шаховску таблу димензија  $6 \times 2006$  тако да се узјамно не туку (тј. два топа се не могу истовремено наћи у истој врсти или истој колони)?
3. Нека је  $S = \{a, b, c\}$ . Колико има функција  $f : S \rightarrow S$  за које важи

$$f(f(x)) = x$$

за свако  $x \in S$ .

4. Наћи све уређене парове реалних бројева  $(x, y)$  који задовољавају једначине

$$|x + y - 4| = 5, \quad |x - 3| + |y - 1| = 5.$$

5. Збир 49 природних бројева једнак је 999. Наћи највећу могућу вредност њиховог највећег заједничког делиоца.

Време за рад 180 минута.  
Задатке детаљно образложити.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28.01.2006.

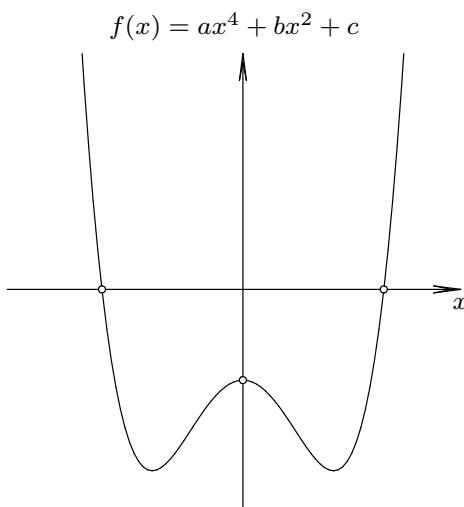
Други разред – А категорија

1. Одредити све целе бројеве  $a$  за које су изрази  $96 + a$  и  $5 + a$  кубови целих бројева.
2. Може ли се једнакостранични троугао поделити на 2006 једнакостраничних троуглова?
3. Наћи  $\angle ACB$  оштроуглог  $\triangle ABC$  ако је познато да дуж  $HN$ , која спаја подножја висина  $AH$  и  $BN$ , полови симетралу  $\angle ACB$ .
4. Наћи све  $x \in \mathbb{R}$  за које је неједначина

$$(2 - a)x^3 + (1 - 2a)x^2 - 6x + (5 + 4a - a^2) < 0$$

тачна бар за једну вредност  $a \in [-1, 2]$ .

5. На слици је скица графика функције  $y = ax^4 + bx^2 + c$ . Какве знаке имају коефицијенти  $a$ ,  $b$  и  $c$ ?



Време за рад 180 минута.  
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије  
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28.01.2006.

Други разред – Б категорија

1. Одредити све комплексне бројеве  $z = x + iy$ , за које важи

$$|z - 2| = |z + 2i| \quad \text{и} \quad |z + 2| = |z - 2i|.$$

2. За коју вредност параметра  $m$  у једначини

$$x^2 - 2mx + 3m^2 - 38m + 156 = 0$$

је једно решење веће од другог? (сличан са Тан. 34, стр. 49)

3. Наћи  $\triangle ACB$  оштроуглог  $\triangle ABC$  ако је познато да дуж  $HN$ , која спаја подножја висина  $AH$  и  $BN$ , полови симетралу  $\angle ACB$ .

4. Доказати да за  $m, n \in \mathbb{N}$  важи

$$n\sqrt{m-1} + m\sqrt{n-1} \leq mn.$$

5. Показати да постоји бесконачно много четворки целих позитивних бројева  $x, y, z, t$  за које важи:

$$x^3 + y^4 = z^5 + t^6.$$

Време за рад 180 минута.  
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије  
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28.01.2006.

Трећи разред – А категорија

1. Решити систем једначина

$$\begin{aligned}\log_2 x + \log_4 y + \log_4 z &= 2 \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x &= 2 \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y &= 2.\end{aligned}$$

2. Наћи све парове реалних бројева  $(a, b)$  такве да је

$$(a + bi)^{2006} = a - bi.$$

3. Ако странице троугла задовољавају релацију

$$a - b = b - c \geq 0$$

доказати да други по величини угао не прелази  $60^\circ$ .

4. Нека је  $a + b + c = 1$  и нека су  $a, b, c$  дужине страница троугла.

Доказати да је

$$a^2 + b^2 + c^2 < \frac{1}{2}.$$

5. Постоје ли природни бројеви  $x, y$  и  $z$  за које важи:

$$x^3 + y^4 = z^5 ?$$

Време за рад 180 минута.  
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије  
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ  
**28.01.2006.**

**Трећи разред – Б категорија**

- 1.** Решити систем једначина

$$\begin{aligned}\log_2 x + \log_4 y + \log_4 z &= 2 \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x &= 2 \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y &= 2.\end{aligned}$$

- 2.** Једнакостранични троугао  $ABC$ , странице  $a$ , ротира око праве која садржи теме  $A$  и паралелна је висини кроз теме  $B$ . Израчунати површину и запремину добијеног ротационог тела.
- 3.** Између страница троугла постоји релација

$$a - b = b - c \geqslant 0.$$

Доказати да други по величини угао не прелази  $60^\circ$ .

- 4.** Одредити скуп решења неједначине

$$\sin^4 x + \cos^4 x \leqslant \frac{3}{4}.$$

- 5.** На школској табли су слике правилног 12-угла и правилног 15-угла. Оба полигона су уписаны у кружнице једнаких полупречника. Ана је обим 12-угла помножила са површином 15-угла а Марија је обим 15-угла помножила са површином 12-угла. Која од њих две је добила већи број?

Време за рад 180 минута.  
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије  
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28.01.2006.

Четврти разред – А категорија

1. Нека је функција  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  задата формулом

$$f(x) = 3 \sin x + 4 \cos x.$$

Одредити максималну и минималну вредност ове функције.

2. Нађи највећу вредност функције

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 9} + \frac{1}{x^2 - 6x + 21} + \cos 2\pi x$$

на интервалу  $(0, +\infty)$ .

3. Претпоставимо да смо реалну функцију  $\psi$  увели на следећи начин

$$\psi(x) = \begin{cases} x, & x > 2, \\ 2, & 1 < x \leq 2, \\ 2x, & x \leq 1. \end{cases}$$

- (а) Решити неједначину  $\psi(x) < x$ ;  
(б) Решити једначину  $\psi(x) + \psi(1-x) + \psi(\psi(x)) = 2$ .

4. Нађи све функције  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , такве да за произвољне реалне бројеве  $x$  и  $y$  важи једнакост

$$f(x-y) = f(x) + f(y) - 2xy.$$

5. Постоје ли цели позитивни бројеви  $x, y, z$  за које важи:

$$x^3 + y^4 = z^5 ?$$

Време за рад 180 минута.  
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије  
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28.01.2006.

Четврти разред – Б категорија

1. Решити систем једначина

$$\begin{aligned}\log_2 x + \log_4 y + \log_4 z &= 2 \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x &= 2 \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y &= 2.\end{aligned}$$

2. Нека је функција  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  задата формулом

$$f(x) = 3 \sin x + 4 \cos x.$$

Одредити максималну и минималну вредност ове функције.

3. Наћи вредности параметра  $p$  за које једначина

$$x^4 - (3p+2)x^2 + p^2 = 0$$

има четири реална решења која образују аритметичку прогрецију.

4. Наћи највећу вредност функције

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 9} + \frac{1}{x^2 - 6x + 21} + \cos 2\pi x$$

на интервалу  $(0, +\infty)$ .

5. Претпоставимо да смо реалну функцију  $\psi$  увели на следећи начин

$$\psi(x) = \begin{cases} x, & x > 2, \\ 2, & 1 < x \leq 2, \\ 2x, & x \leq 1. \end{cases}$$

- (а) Решити неједначину  $\psi(x) < x$ ;  
(б) Решити једначину  $\psi(x) + \psi(1-x) + \psi(\psi(x)) = 2$ .

Време за рад 180 минута.  
Задатке детаљно образложити.