Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.01.2013.

Први разред – А категорија

1. Дужина висине AD троугла ABC једнака је половини дужине странице BC. Доказати да угао код темена A датог троугла не може бити туп.

2. Наћи остатак при дељењу полинома $x^{2011}+1$ полиномом $(x+1)^2$.

3. Да ли постоји природан број n такав да декадни запис броја $n!$ има облик

$$n! = \ldots 2012\underbrace{0\ldots0}_{k},$$

за неки природан број k?

4. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$ такав да је $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 120^\circ$. Тачке P и Q изабране су тако да су $\triangle ACP$ и $\triangle BDQ$ једнакостранични, и притом тачке P и Q леже у оним полуравнима са ивицама AC и BD у којима нису тачке B и A, редом. Доказати да се праве PQ, AD и BC секу у једној тачки.

5. Колико се највише жетона може поставити на поља табле 7×7 тако да ниједан правоугаоник површине 6 (са страницама дуж страница поља) не садржи више од једног жетона?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.01.2013.

Други разред – А категорија

1. На страницама AC и AB једнакостраничног троугла ABC дате су тачке M и N, редом, тако да је $MC : MA = NA : NB = 2 : 1$. Ако је тачка P пресек дужи BM и CN, доказати да је $\sphericalangle APC = 90^\circ$.

2. Да ли постоји број $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ такав да су скупови

$$\{(z-i)^n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \quad \text{и} \quad \{(z+i)^n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$$

коначни?

3. Нека је функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задата са $f(x) = x^2 + (a+1)x + 1$. Одредити све вредности реалног параметра a такве да за све реалне бројеве x важи

$$\left| \frac{f(x)}{x^2+x+1} \right| < 3.$$

4. Дат је троугао ABC. Нека је $2r < \min\{AB, BC, CA\}$ и k_A, k_B, k_C кружнице са центрима A, B, C, редом, и полупречником r. На колико различитих начина можемо одабрати тачке $A_1 \in k_A$, $B_1 \in k_B$ и $C_1 \in k_C$ тако да је троугао $A_1B_1C_1$ сличан, али не и подударан, са троуглом ABC?
(Са $\min\{a, b, c\}$ означен је најмањи од реалних бројева a, b, c.)

5. Шаховска фигура, коју зовемо *слон*, у једном потезу помера се за једно поље лево, или за једно поље горе, или за једно или два поља укосо горе лево (под углом од 135°). Слон се налази на доњем десном пољу шаховске табле димензије 8×7. Два играча наизменично померају слона, а губи онај играч који први не може да одигра потез. Који играч има победничку стратегију?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.01.2013.

Трећи разред – А категорија

1. Нека су $z_1, z_2, \dots, z_{2011}$ комплексни бројеви модула 1 чији је збир једнак 0, а z произвољан комплексан број. У функцији од z израчунати збир

$$\sum_{k=1}^{2011} |z - z_k|^2.$$

2. Колико највише реалних нула може имати полином

$$P(x) = (ax^3 + bx + c)(bx^3 + cx + a)(cx^3 + ax + b),$$

где је a, b, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$?
(Свака нула рачуна се онолико пута колика је њена вишеструкост.)

3. Нека су $S(n)$ и $P(n)$, редом, збир и производ цифара природног броја n (у декадном запису). За $k \in \mathbb{N}$, одредити број решења једначине

$$\frac{P(n)}{S(n)} = k.$$

4. Дат је троугао ABC и тачка M која не лежи ни на једној од три праве које садрже висине тог троугла. Права кроз M нормална на AM сече праву BC у тачки A_1. Тачке B_1 и C_1 дефинишу се аналогно. Доказати да су A_1, B_1, C_1 колинеарне тачке.

5. Колико се највише подскупова скупа $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$ може изабрати, тако да је унија свака два једнака скупу N_n?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.01.2013.

Четврти разред – А категорија

1. Колико нула има функција

$$f(x)=\frac{1}{x-a_1}+\frac{1}{x-a_2}+\ldots+\frac{1}{x-a_n},$$

где су $a_1<a_2<\ldots<a_n$ произвољни реални бројеви?

2. Одредити све природне бројеве n за које важи једнакост

$$3^n+4^n+\cdots+(n+2)^n=(n+3)^n.$$

3. Одредити (или доказати да не постоји) највећи природан број n за који постоји цео број a такав да свака два међу бројевима $a,a^2,a^3,\ldots,a^n$ дају различите остатке при дељењу са 2013.

4. У троуглу ABC тачке S и S_a су центри редом уписаног и споља приписаног круга наспрам A, E је тачка пресека симетрале унутрашњег угла код темена A и странице BC, а N је средиште лука BC описане кружнице $\triangle ABC$ који не саджи A. Доказати да важи

$$AS\cdot AS_a=AE\cdot AN.$$

5. За $n\in\mathbb{N}$ нека је $N_n=\{1,2,\ldots,n\}$. Са L_n означен је број подскупова скупа N_n (укључујући и празан скуп) који не садрже два узастопна природна броја, као ни 1 и n истовремено. Са M_n означен је број подскупова скупа N_n (укључујући и празан скуп) који не садрже два узастопна природна броја. Одредити све природне бројеве $m>3$ за које важи

$$L_m>M_{m-3}+M_{m-1}.$$

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.01.2013.

Први разред – Б категорија

1. Доказати да број n^2+1 није дељив са 3 ни за један природан број n.

2. Не једном острву живе само виле и вештице. Виле увек говоре истину, а вештице увек лажу. Један бродоломник, који је све то знао, сусрео се са две становнице острва, особама А и Б, али ни за једну није знао да ли је вила или вештица. Да би сазнао кога је срео упитао је остврљанку А: „Да ли сте обе вештице?”.

а) За који добијени одговор је могао са сигурношћу да одреди којој врсти која особа припада?

б) Уколико не може са сигурношћу да одреди којој врсти која особа припада, бродоломник поставља још једно питање особи А: „Да ли сте вас две припаднице различитих врста?”. Који је одговор бродоломник добио, ако је на основу њега са сигурношћу могао да одреди којој врсти која особа припада?

(На постављена питања бродоломник може добити само одговоре ДА и НЕ.)

3. Дата је функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ са

$$f(x)=\begin{cases} -x-1, & x\leqslant -2\\ \dfrac{x-3}{x+2}, & x>-2. \end{cases}$$

Доказати да је f бијекција и одредити $f^{-1}(x)$.

4. Нека је ABC једнакокраки троугао ($AB=AC$). На правој BC одређене су тачке D и E тако да важи распоред $D-B-C-E$ и $DB=CE$. Ако су F и G подножја нормала из D на AC и из E на AB, редом, доказати да је:

а) $\sphericalangle FDB=\sphericalangle GEC$;

б) $FG\parallel BC$.

5. Помоћу цифара $1,2,\ldots,9$ формирати деветоцифрени број $N=\overline{C_1C_2\ldots C_9}$, тако да је сваки од двоцифрених бројева $\overline{C_1C_2}$, $\overline{C_2C_3},\ldots,\overline{C_8C_9}$ дељив са 7 или са 13. Колико решења има овај задатак?
(Свака цифра се може употребити само једном.)

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.01.2013.

Други разред – Б категорија

1. Нека је

$$x = \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{23+\sqrt{513}}{4}} + \sqrt[3]{\frac{23-\sqrt{513}}{4}} - 1\right).$$

Доказати да је $2x^3 + 2x^2 + 1$ природан број.

2. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$|x(1-x)| < 0,05\,.$$

3. Одредити све природне бројеве који су дељиви са 5 и са 9 и имају тачно 10 позитивних делилаца.

4. Нека је M тачка унутар троугла ABC. Ако праве AM, BM, CM садрже центре описаних кругова троуглова BMC, CMA, AMB, редом, доказати да је M центар уписаног круга троугла ABC.

5. Наћи збир свих троцифрених бројева чије су све цифре непарне.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.01.2013.

Трећи разред – Б категорија

1. Четвороугао $ABCD$ је основа пирамиде $SABCD$, а ивица SD је њена висина. Израчунати запремину пирамиде, ако је $AB = BC = \sqrt{5}$, $AD = DC = \sqrt{2}$, $AC = 2$ и $SA + SB = 2 + \sqrt{5}$.

2. У зависности од реалних параметара a и b у скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1, \\ -x & - & 2y & - & 2z & = & a, \\ 3x & + & 2y & + & bz & = & 4. \end{array}$$

3. Доказати да је број $2^{2^n} - 4$ дељив са 12 за све $n \in \mathbb{N}$.

4. Дужине страница троугла ABC су $AB = 33$, $AC = 21$ и $BC = n$, где је $n \in \mathbb{N}$. Тачке D и E изабране су на страницама AB и AC, редом, тако да је $AD = DE = EC = m$, за неко $m \in \mathbb{N}$. Одредити бројеве n и m.

5. На стандардну шаховску таблу постављена су 33 ловца. Доказати да се са табле може уклонити 28 ловаца, тако да се преосталих 5 не нападају.
(Ловац напада сва поља чији се центри налазе на правој која пролази кроз центар поља у коме се ловац налази и заклапа угао од 45° или 135° са ивицом табле.)

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.01.2013.

Четврти разред – Б категорија

1. Одредити реалне бројеве a и b тако да функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ задата са

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin ax}{4x}, & x<0,\\ b^2x^2+b(x+2), & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ e^{\frac{1}{2-x}}-1, & x>2,\end{cases}$$

буде непрекидна.

2. У скупу комплексних бројева решити једначину

$$x^6-2x^3+4=0.$$

3. Одредити све просте бројеве p за које једначина

$$x^4+4=p$$

има решења у скупу природних бројева.

4. Нека је са $x\star y=\dfrac{xy}{x+y}$ дефинисана операција на скупу позитивних рационалних бројева. Доказати да је

$$\underbrace{(\ldots((2013\star 2013)\star 2013)\ldots\star 2013)\star 2013}_{2013}$$

природан број.
(У претходном изразу број 2013 се појављује 2013 пута.)

5. Нека су x_1, x_2 и x_3 корени полинома

$$p(x)=x^3-2x+2010.$$

Уколико су x_1^2, x_2^2 и x_3^2 корени полинома $q(x)=x^3+ax^2+bx+c$, одредити a, b и c.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.