СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

такмичење ученика средњих школа из математике

Ниш, 06.04.2010.

Први дан

1. Неки од n градова су повезани авионским линијама (све линије су двосмерне). Постоји тачно m линија. Нека је d_i број линија које полазе из града i, за $i = 1, 2, \ldots, n$. Ако је $1 \leqslant d_i \leqslant 2010$, за свако $i = 1, 2, \ldots, n$, доказати да важи

$$\sum_{i=1}^{n} {d_i}^2 \leqslant 4022m - 2010n.$$

Одредити све n за које може да се достигне једнакост.

2. У оштроуглом $\triangle ABC$ тачка M је средиште странице BC, а тачке D, E и F су подножја висина из темена A, B и C, редом. Нека је H ортоцентар $\triangle ABC$, S средиште дужи AH, а G пресек дужи FE и AH. Ако је N тачка пресека тежишне дужи AM и описане кружнице $\triangle BCH$, доказати да је $\sphericalangle HMA = \sphericalangle GNS$.

3. Нека је A бесконачан подскуп скупа природних бројева. Одредити све природне бројеве n такве да за свако $a \in A$ важи

$$a^n + a^{n-1} + \ldots + a^1 + 1 \mid a^{n!} + a^{(n-1)!} + \ldots + a^{1!} + 1.$$

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.

СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

такмичење ученика средњих школа из математике

Ниш, 07.04.2010.

Други дан

1. Нека је O центар описане кружнице $\triangle ABC$. Права кроз O сече странице CA и CB у тачкама D и E, редом, и описану кружницу $\triangle ABO$ у тачки P унутар троугла (различитој од O). Тачка Q на страници AB је таква да је $\dfrac{AQ}{QB} = \dfrac{DP}{PE}$. Доказати да је $\sphericalangle APQ = 2 \cdot \sphericalangle CAP$.

2. Таблица димензија $n \times n$, на чијим пољима су бројеви $1, 2, \ldots, n^2$ (на сваком пољу тачно један број и сваки број на тачно једном пољу) назива се *нишка* ако сви производи од по n бројева који се налазе на n „разбацаних" поља дају исти остатак при дељењу са n^2+1. Да ли постоји нишка таблица за:

(а) $n = 8$;

(б) $n = 10$?

(n поља су „разбацана" ако никоја два нису у истој врсти или у истој колони.)

3. Нека су a_0 и a_n различити делиоци природног броја m, а низ природних бројева $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ такав да задовољава

$$a_{i+1} = |a_i \pm a_{i-1}| \quad \text{за } 0 < i < n.$$

Ако је НЗД $(a_0, \ldots, a_n) = 1$, доказати да у низу постоји члан који је мањи од $\sqrt{m}$.

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.