

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
МИНИСТАРСТВО ПРОСВЕТЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ

IV СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

за ученике основних школа (до 15,5 година)

Београд, 02-03. јун 2010. године

I ДАН

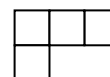
1. Нека су тачке E и F подножја висина из темена B и C троугла ABC . Тачка M је подножје нормале из тачке F на страницу BC , а тачка N је подножје нормале из тачке B на праву EF . Докажи да су праве AC и MN паралелне.

2. Нека су x и y бројеви из интервала $[1, 2]$. Докажи да је

$$(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \leq \frac{9}{2}.$$

3. Одреди просте бројеве p за које је $2^{p^2} + 3^{p^2} + 4^{p^2} - 5$ дељиво са 13.

4. Табла димензија 7×7 је покривена L фигурама састављеним од 4 једнака квадрата, тако да је тачно једно поље остало непокривено. Одреди сва поља табле која могу остати непокривена.



Сваки задатак се бодује са по 10 бодова.

Израда задатака траје 240 минута.

Решење сваког задатка јасно образложити.

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
МИНИСТАРСТВО ПРОСВЕТЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ

IV СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

за ученике основних школа (до 15,5 година)

Београд, 02-03. јун 2010. године

II ДАН

1. Нађи све троцифрене природне бројеве $A < 500$ који имају следеће својство: „Ако се један иза другог испишу бројеви A , $2A$ и A , добије се деветоцифрени број који је потпун квадрат и који има тачно 4 различита проста делиоца.“

2. Докажи следећу неједнакост за све позитивне реалне бројеве a , b и c :

$$\frac{a^2 + 2b^2 + 4c^2}{bc} + \frac{b^2 + 2c^2 + 4a^2}{ac} + \frac{c^2 + 2a^2 + 4b^2}{ab} \geq 21.$$

Када важи знак једнакости?

3. На табли је написано 2010 природних бројева и један од њих је број 2011. Познато је, такође, да је за свака два написана броја на табли написана и апсолутна вредност њихове разлике. Докажи да су сви бројеви написани на табли дељиви са 2011.

4. На страници BC троугла ABC изабрана је тачка M тако да тежиште троугла ABM припада кружници описаној око троугла ACM , а тежиште троугла ACM припада кружници описаној око троугла ABM . Доказати да су тежишне дужи из темена M , троуглова ABM и ACM , једнаке.

Сваки задатак се бодује са по 10 бодова.

Израда задатака траје 240 минута.

Решење сваког задатка јасно образложити.