Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

07.05.2022.

Први разред – Б категорија

1. Нека су $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. Колико највише чланова скупа

$$\{a, b, c, d, e, a^2 - b, b^2 - c, c^2 - d, d^2 - e, e^2 - a\}$$

може бити негативно?

2. Нека су a, b, c различити реални бројеви. Одредити све реалне t такве да полиноми

$$p(x) = ax^2 + bx + c, \qquad q(x) = bx^2 + cx + a, \qquad r(x) = cx^2 + ax + b$$

дају једнаке остатке при дељењу са $x - t$.

3. Нека су X, Y, Z, редом, тачке страница AB, BC, CA једнакостраничног $\triangle ABC$, тако да је $AX = 1,\ BY = 2, CZ = 3$. Ако је $\triangle XYZ$ једнакокрак, одредити које вредности може имати дужина странице AB.

4. На стадиону има укупно 2022 седишта која су означена бројевима од 1 до 2022. Сваки од 2022 навијача добио је улазницу са бројем од 1 до 2022 (сваки навијач добио је улазницу са различитим бројем), али су одлучили да места попуне по свом нахођењу (сваки навијач попуњава тачно једно место). На утакмици је организована наградна игра, тако да награду добија сваки навијач коме је збир бројева написаних на карти и на седишту паран.

(а) На колико начина се могу попунити места, тако да тачно 9 навијача добије награду?

(б) На колико начина се могу попунити места, тако да тачно 4 навијача добије награду?

5. Нека су $S(n)$ и $P(n)$, редом, збир и производ цифара природног броја n у декадном запису. Доказати да постоји природан број n, тако да је $n + P(n) + S(n)$ природан број који у декадном запису има укупно 2022 цифре које су међусобно једнаке.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

07.05.2022.

Други разред – Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\sqrt[5]{\frac{5-x}{x+3}}+\sqrt[5]{\frac{x+3}{2(x-5)}}=1-\frac{1}{\sqrt[5]{2}}\,.$$

2. Нека је $ABCD$ тетиван четвороугао и нека су тачке B', B'', C', C'', редом, на полуправама AB, DB, AC, DC такве да је $AB\cdot AB' = AC\cdot AC'$ и $DB\cdot DB'' = DC\cdot DC''$. Нека је O' пресек симетрала дужи BB' и CC', а O'' пресек симетрала дужи BB'' и CC''. Ако је $O'\neq O''$, доказати да центар описаног круга четвороугла $ABCD$ припада правој $O'O''$.

3. Одредити све n, a, b, где је $n>1$ природан број, а a и b цифре различите од 0, тако да постоји правоугли троугао чије су катете $\overline{\underbrace{a\ldots a}_{n-1}0}$ и $\overline{\underbrace{b\ldots b}_{n}}$, а хипотенуза $\overline{\underbrace{a\ldots a}_{n-1}b}$, где $\overline{\underbrace{a\ldots a}_{n-1}0}$ представља број који у декадном запису има n цифара, првих $n-1$ једнаких a, а последње једнаке 0, $\overline{\underbrace{b\ldots b}_{n}}$ представља број који у декадном запису има n цифара једнаких b, а $\overline{\underbrace{a\ldots a}_{n-1}b}$ представља број који у декадном запису има n цифара, првих $n-1$ једнаких a, а последње једнаке b.

4. У изразу

$$1\,\square\,2\,\square\,3\,\square\,4\,\square\,5\,\square\,6\,\square\,7\,\square\,8\,\square\,9\,\square\,10\,\square\,11=$$

се у сваки „квадратић” уписује знак + или знак −, а након тога одређује вредност добијеног израза. Доказати да постоји вредност која је добијена барем 18 пута.

5. Доказати да једначина

$$\big(7+\sqrt{48}\big)^x+17\big(2-\sqrt{3}\big)^x=12$$

нема решења у скупу реалних бројева.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

07.05.2022.

Трећи разред – Б категорија

1. Нека је $m \in \mathbb{R}$ и нека су

$$\overrightarrow{a} = \begin{bmatrix} 2 & m & 1 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} m & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

вектори ивица које полазе из истог темена тростране пирамиде. Уколико постоји, одредити m за које је запремина те пирамиде најмања, као и висину која одговара основи одређеној векторима $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ пирамиде за коју се достиже минимална запремина.

2. Доказати да је број $\dfrac{16 \arcsin \frac{\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}}{2}}{\pi}$ природан.

3. Нека је D тачка странице CA троугла ABC, тако да је $CD = 2DA$. Ако је $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DBC = 45^\circ$, израчунати $\sphericalangle ABC$.

4. Нека је $S(n)$ збир цифара природног броја n у декадном запису. Да ли постоји прост број p, тако да је и број $S(7^p + 5^p + 2022^p)$ прост?

5. Мишко има шест наизглед истих златника, али њихове масе су међусобно различите. Притом, међу златницима постоји тачно по један масе 1g, 2g, 3g, 4g, 5g и 6g, а сваки златник означен је једним бројем из $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, тако да је сваки број из тог скупа употребљен тачно једном. Број којим је златник означен треба да представља његову масу, али Мишко сумња да су неки златници погрешно означени. Он поседује теразије (теразије представљају направу која има два таса; стављајући одређене масе на тасове, помоћу теразија се може установити да ли је маса на једном тасу мања, једнака или већа од масе на другом тасу, али уколико те масе нису једнаке, помоћу теразија се не може утврдити колика је разлика између маса које се налазе на тасовима).

Међутим, Мишкове теразије су старе, па постоји могућност да ће се након два мерења покварити. Стога он жели да у највише два мерења утврди да ли међу златницима има погрешно означених (интересује га само податак да ли међу златницима има погрешно означених, а уколико такви постоје, није нужно да утврди и који су то златници). Може ли Мишко остварити своју намеру?

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

07.05.2022.

Четврти разред – Б категорија

1. Нека су $x_1, x_2, x_3 \neq 0$ све нуле полинома $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Одредити све $a, b, c \in \mathbb{R}$, тако да су

$$y_1 = x_1 + \tfrac{2}{x_2 x_3}, \qquad y_2 = x_2 + \tfrac{2}{x_3 x_1} \qquad \text{и} \qquad y_3 = x_3 + \tfrac{2}{x_1 x_2}$$

све нуле полинома $q(x) = x^3 + cx^2 + ax + b$.

2. Нека је $A = \{1, 2, \ldots, 74\}$ и $B = \{1, 2, \ldots, 2022\}$. Одредити број парова функција (f, g) таквих да $f : A \to B$, $g : B \to A$ и важи $g(f(x)) = 75 - x$ за свако $x \in A$.

3. Одредити све природне бројеве n за које вредност израза

$$\cos^n x + \cos^n\left(x + \tfrac{2\pi}{3}\right) + \cos^n\left(x + \tfrac{4\pi}{3}\right)$$

не зависи од x.

4. Одредити све природне бројеве k, m, n за које важи

$$7^k = 5^m + 2 \cdot 22^n.$$

5. У $\triangle ABC$ је $\sphericalangle CAB = 31^\circ$ и $\sphericalangle ABC = 62^\circ$. Тачка X припада унутрашњости $\triangle ABC$ и важи $\sphericalangle XBC = 3^\circ$ и $\sphericalangle XCA = 29^\circ$. Ако је Y пресек правих CX и AB, доказати да је $AY = YX$.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред – Б категорија

1. У сваком од $\{a, e^2-a\}$, $\{b, a^2-b\}$, $\{c, b^2-c\}$, $\{d, c^2-d\}$, $\{e, d^2-e\}$ је збир елемената ненегативан, па је највише један члан сваког од уочених подскупова негативан. Стога у наведеном скупу може бити највише 5 негативних чланова. Са друге стране, уколико су a, b, c, d, e међусобно различити негативни бројеви, наведени скуп садржи 5 негативних чланова. Дакле, највише 5 чланова наведеног скупа може бити негативно.

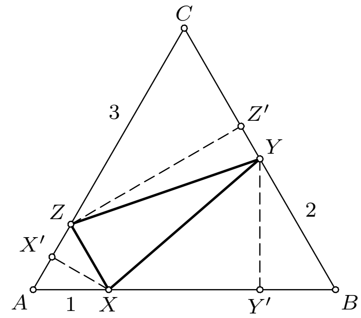
2. На основу Безуовог става, остаци при дељењу са $x-t$ су једнаки ако и само ако је $p(t) = q(t) = r(t)$, па је

$$0 = p(t) - q(t) = (a-b)t^2 + (b-c)t + c - a = (t-1)\big((a-b)t + a - c\big),$$

тј. $t = 1$ или $t = \frac{c-a}{a-b}$, а аналогно из $q(t) - r(t) = 0$ је $t = 1$ или $t = \frac{a-b}{b-c}$.

Ако је $t \neq 1$, из претходног следи $\frac{c-a}{a-b} = \frac{a-b}{b-c}$, односно $(c-a)(b-c) = (a-b)^2$, тј. $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc = 0$, одакле је $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 0$, па је $a-b = b-c = c-a = 0$, односно $a = b = c$, што је немогуће. Ако је $t = 1$, онда је $p(t) = q(t) = r(t) = a+b+c$, па је $t = 1$ једина вредност која задовољава наведене услове.

3. Нека је $AB = a$. Како Z припада страници CA, следи $a \geqslant CZ = 3$. Ако је X' подножје нормале из X на CA, онда је $XX' = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (пошто је $\triangle AXX'$ правоугли, хипотенузе $AX = 1$ и оштрих углова једнаких 30° и 60°) и $ZX' = |CZ - CX'| = \left|3 - a + \frac{1}{2}\right| = \left|a - \frac{7}{2}\right|$ (пошто је $CZ = 3$ и $CX' = CA - XA' = a - \frac{1}{2}$). Аналогно, ако је Y' подножје нормале из Y на AB, онда је $YY' = \sqrt{3}$ (пошто је $\triangle BYY'$ правоугли, хипотенузе $BY = 2$ и оштрих углова једнаких 30° и 60°) и $XY' = |AX - AY'| = |1 - a + 1| = |a-2|$ (пошто је $AX = 1$ и $AY' = AB - Y'B = a - 1$), а ако је Z' подножје нормале из Z на BC, онда је $ZZ' = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (пошто је $\triangle BYY'$ правоугли, хипотенузе $CZ = 3$ и оштрих углова једнаких 30° и 60°) и $YZ' = |BY - BZ'| = \left|2 - a + \frac{3}{2}\right| = \left|a - \frac{7}{2}\right|$ (пошто је $BY = 2$ и $BZ' = BC - Z'C = a - \frac{3}{2}$).



Држ–22–1Б3

На основу Питагорине теореме, примењене на $\triangle X'XZ$, $\triangle Y'YX$ и $\triangle Z'ZY$, следи

$$\begin{aligned} XZ^2 &= ZX'^2 + X'X^2 = \left|a - \tfrac{7}{2}\right|^2 + \tfrac{3}{4} = a^2 - 7a + 13, \\ YX^2 &= XY'^2 + Y'Y^2 = |a-2|^2 + 3 = a^2 - 4a + 7 \\ \text{и} \quad ZY^2 &= YZ'^2 + Z'Z^2 = \left|a - \tfrac{7}{2}\right|^2 + \tfrac{27}{4} = a^2 - 7a + 19, \end{aligned}$$

па је $ZY > XZ$, као и $YX^2 - XZ^2 = 3a - 6 = 3(a-2) > 0$, пошто је $a > 3$. Како је $\triangle XYZ$ једнакокраки, следи да је $ZY = YX$, па је $a^2 - 7a + 19 = ZY^2 = YX^2 = a^2 - 4a + 7$, односно $a = 4$.

4. По условима, навијач добија награду ако и само ако су бројеви на његовој улазници и на његовом седишту исте парности. Нека је B_{pp} број навијача чији су бројеви и улазнице и седишта парни, B_{np} број навијача чији је број улазнице непаран, а седишта паран, B_{pn} број навијача чији је број улазнице паран, а седишта непаран, а B_{nn} број навијача чији су бројеви и улазнице и седишта непарни. Онда је $B_{pp} + B_{pn}$ једнако броју навијача који на улазници имају паран број, тј. $B_{pp} + B_{pn} = 1011$, а аналогно је $B_{np} + B_{nn} = 1011$, $B_{pn} + B_{nn} = 1011$, $B_{pp} + B_{np} = 1011$, па је $B_{pn} = B_{np}$ и $B_{nn} = B_{pp}$.

(а) Број навијача који су добили награду је $B_{nn} + B_{pp} = 2B_{pp}$, односно мора бити паран број, па није могуће попунити места тако да тачно 9 навијача добије награду.

(б) Број навијача који су добили награду је $B_{nn}+B_{pp}=2B_{pp}=4$, па је $B_{pp}=B_{nn}=2$ и $B_{np}=B_{pn}=1009$. Два награђена навијача са парним бројем улазнице се могу изабрати на $\binom{1011}{2}$ начина, њихова места (означена парним бројем) на $\binom{1011}{2}$ начина и на та места се могу распоредити на $2!$ начина. Након тога, места за преостале навијаче са парним бројем улазнице се могу изабрати на $\binom{1011}{1009}=\binom{1011}{2}$ начина (пошто заузимају места означена непарним бројем), а на та места се могу распоредити на $1011\cdot 1010\cdot\ldots\cdot 3$ начина. Након тога, два награђена навијача са непарним бројем улазнице се могу изабрати на $\binom{1011}{2}$ начина, на преостала 2 места означена непарним бројем се могу распоредити на $2!$ начина, а преосталих 1009 навијача са непарним бројем улазнице се на преосталих 1009 места означена парним бројем могу распоредити на $1009!$ начина.

Дакле, укупан број попуњавања места, тако да тачно 4 навијача добије награду је $\binom{1011}{2}\cdot 2!\cdot\binom{1011}{2}\cdot 1011\cdot 1010\cdot\ldots\cdot 3\cdot\binom{1011}{2}\cdot 2!\cdot 1009!=\binom{1011}{2}^2\cdot 1011!\cdot\frac{1011\cdot 1010}{2}\cdot 2\cdot 1009!=\binom{1011}{2}^2\cdot(1011!)^2$.

5. Нека је $n=\underbrace{1\ldots1}_{2017}09074$ (у декадном запису). Онда је $P(n)=0$, $S(n)=2017\cdot 1+0+9+0+7+4=2037$, па је $n+P(n)+S(n)=\underbrace{1\ldots1}_{2022}$, тј. уочено n задовољава наведене услове.

Друштво математичара Србије

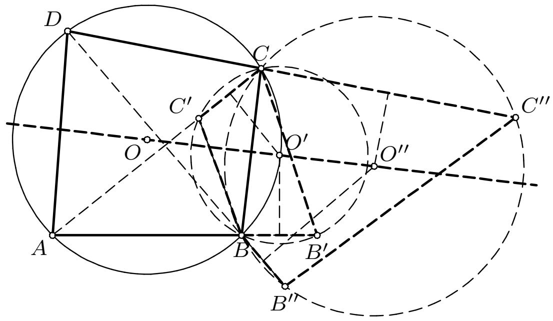
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Други разред – Б категорија

1. Једначина је дефинисана за $x \neq -3$ $x \neq 5$. Ако је $t = \sqrt[5]{\frac{5-x}{x+3}} \neq 0$, следи $t - \frac{1}{\sqrt[5]{2}t} = 1 - \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$, односно $t(t-1) = \frac{1-t}{\sqrt[5]{2}}$, па је $t = 1$ или $t = -\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$, одакле је $x = 1$ или $x = 13$.

2. Како није $B - A - B'$ и $C - A - C'$, из $AB \cdot AB' = AC \cdot AC'$ следи да је четвороугао $BB'C'C$ тетиван (а израз $AB \cdot AB'$ представља потенцију тачке A у односу на описани круг тог четвороугла). Следи да је O' (пресек симетрала дужи BB' и CC') центар описаног круга четвороугла $B'C'CB$, па O' припада симетрали дужи BC. Аналогно је и четвороугао $B''C''CB$ тетиван, па његов центар O'' (пресек симетрала дужи BB'' и CC'') припада припада симетрали дужи BC. Како је и четвороугао $ABCD$ тетиван, симетрали дужи BC припада и његов центар O.

Дакле, тачке O, O', O'' припадају симетрали дужи BC (права $O'O''$ се поклапа са том симетралом).



Држ–22–2Б2

3. На основу Питагорине теореме је $\overline{\underbrace{a\ldots a}_{n-1}0}^2 + \overline{\underbrace{b\ldots b}_{n}}^2 = \overline{\underbrace{a\ldots a}_{n-1}b}^2$, а како је

$$\begin{aligned} \overline{\underbrace{a\ldots a}_{n-1}0} &= 10 \cdot \overline{\underbrace{a\ldots a}_{n-1}} = \tfrac{10a}{9} \cdot \overline{\underbrace{9\ldots 9}_{n-1}} = \tfrac{10a}{9} \cdot (10^{n-1} - 1), \\ \overline{\underbrace{b\ldots b}_{n}} &= \tfrac{b}{9} \cdot \overline{\underbrace{9\ldots 9}_{n}} = \tfrac{b}{9} \cdot (10^{n} - 1) \\ \text{и} \quad \overline{\underbrace{a\ldots a}_{n-1}b} &= b + 10 \cdot \tfrac{a}{9} \cdot \overline{\underbrace{9\ldots 9}_{n-1}} = b + \tfrac{10a}{9} \cdot (10^{n-1} - 1), \end{aligned}$$

следи $\frac{100a^2}{81} \cdot (10^{n-1} - 1)^2 + \frac{b^2}{81} \cdot (10^n - 1)^2 = \big(b + \frac{10a}{9} \cdot (10^{n-1} - 1)\big)^2 = b^2 + \frac{20ab}{9} \cdot (10^{n-1} - 1) + \frac{100a^2}{81} \cdot (10^{n-1} - 1)^2$, тј. $81b^2 + 180ab(10^{n-1} - 1) = b^2(10^n - 1)^2 = b^2\big(10 \cdot (10^{n-1} - 1) + 9\big)^2 = 100b^2(10^{n-1} - 1)^2 + 180b^2(10^{n-1} - 1) + 81b^2$, односно $9a = 5b(10^{n-1} - 1) + 9b$ (пошто је $b \neq 0$ и $10^{n-1} - 1 \neq 0$). Како су a и b ненула цифре, следи $10^{n-1} - 1 < 5b(10^{n-1} - 1) + 9b = 9a \leqslant 81$, па је $n = 2$. Следи $a = 6b$, па како су a и b ненула цифре, мора бити $a = 1$, $b = 6$.

4. Највећи број који се може добити на описани начин се добија уколико се у све квадратиће упише знак $+$ и једнак је 66, а најмањи уколико се у све квадратиће уписе знак $-$ и једнак је -64. Уколико је у питању произвољно уписивање знака, од уписивања у којем је добијен број 66 се разликује у томе што су у квадратиће испред $k_1, \ldots, k_m$ уписани знаци $-$, где је $1 \leqslant m \leqslant 10$, а k_i за $1 \leqslant i \leqslant m$ су различити бројеви из скупа $\{2, \ldots, 11\}$, па се резултат добијен на овај начин од броја 66 разликује за $2(k_1 + \ldots + k_m)$. Следи да је сваки добијени резултат паран број. Притом, уколико се промени знак испред члана k, резултат се мења барем за $2k$, па следи да се резултати 64 и -62 не могу добити (разликују се за 2 од највећег и најмањег резултата који се могу добити, а не постоји квадратић испред 1), резултат 62 се може добити на тачно један начин, избором знака $-$ испред 2 и осталих знака $+$ (ако је знак $-$ уз било које $k > 2$ резултат ће бити мањи од $66 - 2k$), аналогно, резултат -60 се може добити само на један начин (избором знака $+$ испред 2 и осталих знака $-$), а резултат 60 се такође добија на само један начин (ако је испред било којег $k \geqslant 4$ знак $-$, резултат ће бити мањи од $66 - 2k \leqslant 58$, ако је испред 2 и 3 знак $-$, биће мањи од $66 - 10 = 56$, испред 3 мора бити знак $-$, па испред 2 мора бити знак $+$).

Број могућих уписивања знака је $2^{10} = 1024$ (у сваки од 10 квадратића уписује се знак + или −). Притом, по претходном, резултати $66, 62, 60, -60, -64$ се добијају на тачно један начин, а резултати $64, -62$ се не могу добити. Како су преостали резултати парни бројеви из $\{-58, \ldots, 58\}$, следи да се тих 59 резултата добија на $1024-5$ начина. Међутим, уколико би се сваки од преосталих 59 резултата добијао на највише 17 начина, важило би $1003 = 59 \cdot 17 > 1019$, што је нетачно. Следи да се постоји резултат који се добија на барем 18 начина уписивања знака.

Друго решење. Нека су A изрази добијени уписивањем знакова + и − у квадратиће, тако да се знаци уписани у квадратиће испред $2k$ и $2k+1$, за $1 \leqslant k \leqslant 5$, разликују и тако да је добијени резултат 0. На овај начин се одређивање вредности уоченог израза своди на израз облика $1 \pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1$, где се на сваком месту на којем стоји $\pm$ бира знак + или − и једнак је 0 ако и само ако је 3 пута изабран знак −, тј. A садржи барем $\binom{5}{3} = 10$ елемената.

Нека су B изрази добијени уписивањем знакова + и − у квадратиће, тако да је испред бројева $2, 3, 4$ уписан знак +, испред 11 уписан знак −, а у квадратиће испред бројева из подскупова $\{5, 6\}$, $\{7, 8\}$ и $\{9, 10\}$ уписани различити знаци. Приликом одређивања вредности добијеног израза долази се до израза облика $-1 \pm 1 \pm 1 \pm 1$, тј. добиће се вредност 0 ако се у добијеном изразу тачно на два места изабере знак +, што се може урадити на $\binom{3}{2} = 3$ начина. Притом, изрази из B нису и у A, пошто се у њима испред елемената 2 и 3 налази исти знак.

Нека су C изрази добијени уписивањем знакова + и − у квадратиће, тако да је испред бројева $2, 3, 4$ уписан знак −, испред 9 уписан знак +, а у квадратиће испред бројева из подскупова $\{5, 6\}$, $\{7, 8\}$ и $\{10, 11\}$ уписани различити знаци. Приликом одређивања вредности добијеног израза долази се до израза облика $1 \pm 1 \pm 1 \pm 1$, тј. добиће се вредност 0 ако се у добијеном изразу тачно на два места изабере знак −, што се може урадити на $\binom{3}{2} = 3$ начина. Притом, изрази из C нису у A, пошто се у њима испред елемената 2 и 3 налази исти знак, а ни у B, пошто је у њима испред 2 и 3 изабран знак +, док је у изразима из C испред њих знак −.

Нека су D изрази добијени уписивањем знакова + и − у квадратиће, тако да је испред бројева $2, 3$ уписан знак −, испред 4 уписан знак +, у квадратиће испред бројева из подскупова $\{7, 8\}$ и $\{9, 10\}$ уписани различити знаци, D_+ подскуп D, изрази у којима је испред 5 и 6 уписан знак +, а испред 11 знак −, а D_- подскуп D, изрази у којима је испред 5 и 6 уписан знак −, а испред 11 знак +. Како је $1 - 2 - 3 + 4 = 0$ и $\pm(5 + 6 - 11) = 0$, приликом одређивања вредности ових израза се долази до израза облика $\pm 1 \pm 1$ и добиће се вредност 0 ако се у добијеном изразу тачно на једном месту изабере знак −, што се може урадити на $\binom{2}{1} = 2$ начина (и за изразе из D_+ и за изразе из D_-). Притом, изрази из D нису садржани у A, пошто се у њима испред елемената 2 и 3 налази исти знак, нити изрази из B, пошто је у њима испред $2, 3$ и 4 изабран знак +, као ни изрази из C, пошто је у њима испред $2, 3$ и 4 изабран знак −, а због разлике избора знака испред елемената $5, 6, 11$, изрази из D_- и D_+ се разликују.

Дакле, постоји барем $10 + 3 + 3 + 2 + 2 = 20 > 18$ уписивања знака у којима се као резултат добија 0.

5. Како је $2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$ и $7 + \sqrt{48} = \left(2 + \sqrt{3}\right)^2$, ако је $t = \left(2 + \sqrt{3}\right)^x > 0$, наведена једначина постаје $t^2 + \frac{17}{t} = 12$. На основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине (пошто је $t > 0$) следи $t^2 + \frac{17}{t} = t^2 + \frac{17}{2t} + \frac{17}{2t} \geqslant 3\sqrt[3]{t^2 \cdot \frac{17}{2t} \cdot \frac{17}{2t}} > 3 \cdot \sqrt[3]{8 \cdot 8} = 12$. Следи да једначина $t^2 + \frac{17}{t} = 12$ нема позитивних решења, па наведена једначина нема реалних решења.

Друго решење. Као и у првом решењу, ако је $t = \left(2 + \sqrt{3}\right)^x$, следи $t^2 + \frac{17}{t} = 12$, односно $0 = t^3 - 12t + 17 = (t-2)(t^2 + 2t - 8) + 1 = (t-2)^2(t+4) + 1$, што је немогуће, пошто је $t \in \mathbb{R}^+$.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Трећи разред – Б категорија

1. Запремина уочене пирамиде је

$$V(m)=\frac{1}{6}\cdot\left|\begin{vmatrix} 2 & m & 1\\ m & -1 & 2\\ 1 & 1 & -3\end{vmatrix}\right|=\tfrac{1}{6}\cdot\left|3m^2+3m+3\right|=\tfrac{1}{2}\cdot\left(m+\tfrac{1}{2}\right)^2+\tfrac{3}{8}\geqslant\tfrac{3}{8},$$

па се најмања запремина достиже за $m=-\frac{1}{2}$ и једнака је $V_{min}=V\big(-\frac{1}{2}\big)=\frac{3}{8}$. Онда је површина основе над векторима $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ једнака

$$B=\tfrac{1}{2}\cdot\left\|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right\|=\tfrac{1}{2}\cdot\left\|\left[0,-\tfrac{9}{2},-\tfrac{9}{4}\right]\right\|=\tfrac{9\sqrt{5}}{8},$$

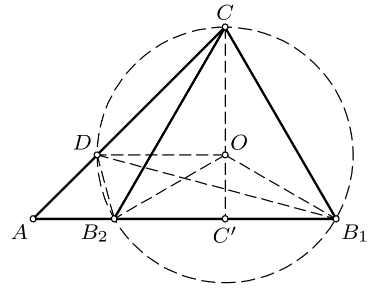
па је висина која одговара тој основи $H=\frac{3V_{min}}{B}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

2. Ако је $\alpha=\arcsin\frac{\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}}{2}$, онда је $\alpha>0$, па је $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$. Следи $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, па је $\cos 4\alpha=2\cos^2 2\alpha-1=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Како је $4\alpha\in(0,2\pi]$, следи $4\alpha\in\left\{\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right\}$, па је број $\frac{16\alpha}{\pi}$ природан.

Коментар. Важи $\alpha=\frac{3\pi}{16}$ (што није показано у решењу, пошто је већ добијено наведено тврђење).

3. Нека је $\varphi=\sphericalangle ABD$. Онда је $\sphericalangle BCA=180^\circ-(\varphi+90^\circ)=90^\circ-\varphi$. На основу синусне теореме, примењене на $\triangle ABD$ и $\triangle DBC$, следи $\frac{BD}{DA}=\frac{\sin\sphericalangle DAB}{\sphericalangle ABD}=\frac{\sin 45^\circ}{\sin\varphi}$ и $\frac{DB}{CD}=\frac{\sin\sphericalangle BCD}{\sin\sphericalangle DBC}=\frac{\sin(90^\circ-\varphi)}{\sin 45^\circ}$, па како је $CD=2DA$, следи $\frac{1}{2}=\sin^2 45^\circ=2\sin\varphi\sin(90^\circ-\varphi)=2\sin\varphi\cos\varphi=\sin 2\varphi$. Како је $\varphi\in(0^\circ,180^\circ)$, следи $2\varphi\in\{30^\circ,150^\circ\}$, тј. $\varphi\in\{15^\circ,75^\circ\}$, а онда је $\sphericalangle ABC\in\{60^\circ,120^\circ\}$. Оба добијена случаја су могућа, у првом је у питању троугао чији су углови код темена A,B,C, редом, једнаки $45^\circ,60^\circ,75^\circ$, а у другом је у питању троугао чији су углови код темена A,B,C, редом, једнаки $45^\circ,120^\circ,15^\circ$.

Друго решење. Нека је C' подножје нормале из C на AB (како је $\sphericalangle CAB=45^\circ$, не може бити $C'-A-B$), O пресек праве CC' и праве која садржи D и паралелна је са AB, а k круг чији је центар O и полупречник OC. Како је $\sphericalangle DOC=\sphericalangle AC'C=90^\circ$ и $\sphericalangle OCD=\sphericalangle C'CA=90^\circ-\sphericalangle CAB=45^\circ$, троугао OCD је једнакокрако–правоугли, па D припада k. Пошто је $\sphericalangle DBC=45^\circ=\frac{1}{2}\cdot\sphericalangle DOC$, тачка B припада већем луку k над тетивом CD. Како је $\sphericalangle ODA=135^\circ$, важи $OA>OD=OC$, па k сече AC' у тачкама, B_1 и B_2, тако да је $A-B_2-C'-B_1$. Како је $2OC'=OC=OB_1=OB_2$, из правоуглих $\triangle OB_2C'$ и $\triangle OC'B_1$ следи $\sphericalangle B_1OC'=\sphericalangle C'OB_2=60^\circ$, тј. $\sphericalangle B_1CC'=\sphericalangle C'CB_2=30^\circ$, па је $\triangle B_1CB_2$ једнакостраничан (CC' је и висина и симетрала угла код темена C овог троугла). Следи $\sphericalangle CB_2B_1=\sphericalangle B_2B_1C=60^\circ$, односно $\sphericalangle AB_2C=120^\circ$ и $\sphericalangle AB_1C=60^\circ$.



Држ–22–3Б3

4. Ако је $p=2$, онда $2\mid 7^2+5^2+2022^2$, док је $7^2+5^2+2022^2\equiv 9+5+4\equiv 8\pmod{10}$, тј. важи $2\mid S(7^2+5^2+2022^2)$ и $S(7^2+5^2+2022^2)>2$, па је број $S(7^2+5^2+2022^2)$ сложен.

Ако је p непаран прост број, онда је $7^p+5^p+2022^p\equiv 1^p+(-1)^p+0\equiv 0\pmod 3$, па $3\mid 7^p+5^p+2022^p$. Како је $7^4\equiv 1\pmod{10}$ и $2022^4\equiv 2^4\equiv 6\pmod{10}$, ако је $p\equiv 1\pmod 4$, тј. $p=4k+1$ за неко $k\in\mathbb{N}$, следи $7^p+5^p+2022^p\equiv 7+5+6^k\cdot 2\equiv 7+5+6\cdot 2\equiv 4\pmod{10}$, а ако је $p\equiv 3\pmod 4$, тј. $p=4k+3$ за неко $k\in\mathbb{N}$, следи $7^p+5^p+2022^p\equiv 7^3+5+6^k\cdot 2^3\equiv 3+5+6\cdot 8\equiv 6\pmod{10}$, па је последња цифра броја $7^p + 5^p + 2022^p$ или 4 или 6. Дакле, важи $3 \mid S(7^p + 5^p + 2022^p)$ и $S(7^p + 5^p + 2022^p) > 3$, па је број $S(7^p + 5^p + 2022^p)$ сложен.

5. Уколико у првом мерењу на један тас стави златнике означене са $1, 2, 3$, а на други златник означен бројем 6, ако теразије нису у равнотежи, Мишко долази до закључка да међу златницима има погрешно означених, па је остварио своју намеру у једном мерењу.

Нека су у првом мерењу теразије биле у равнотежи. Како је маса било која три златника не мања од 6, а маса сваког златника не већа од 6, уколико је маса нека три златника једнака маси четвртог златника, онда је маса четвртог 6, а масе прва три златника су $1, 2, 3$, у неком редоследу. Стога је маса златника означеног са 6 једнака 6, масе златника означених са $1, 2, 3$ су, у неком редоследу, једнаке $1, 2, 3$, а масе златника означених са $4, 5$ су, у неком редоследу, једнаке $4, 5$. Уколико у другом мерењу Мишко на један тас стави златнике означене са 1 и 6, а на други означене са 3 и 5, уколико резултат мерења не покаже да је маса другом тасу већа, Мишко доказује да међу златницима има погрешно означених.

Нека је друго мерење показало да је маса златника на другом тасу већа од масе на првом тасу и нека су a, b, c, редом, масе златника означених са $1, 3, 5$. Онда је $a, b \in \{1, 2, 3\}$, $a \neq b$, $c \in \{4, 5\}$ и $6 + a < b + c$. Следи $7 \leqslant a + 6$ (и притом се једнакост достиже ако и само ако је $a = 1$), $b + c < 3 + 5$ (и притом се једнакост достиже ако и само ако је $b = 3$, $c = 5$), па ако је $6 + a < b + c$, мора бити $6 + a = 7$ и $b + c = 8$, односно $a = 1, b = 3, c = 5$, тј. златници означени бројевима $1, 3, 5$ су исправно означени. Како су масе златника означених са $1, 2, 3$, у неком редоследу, једнаке $1, 2, 3$, следи да су и златници означени са 2 и 4 исправно означени.

Дакле, описаним поступком Мишко остварује своју намеру.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Четврти разред – Б категорија

1. На основу Вијетових правила је $x_1+x_2+x_3=-a$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=b$, $x_1x_2x_3=-c\neq 0$, као и $y_1+y_2+y_3=-c$, $y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1=a$, $y_1y_2y_3=-b$, где су y_1,y_2,y_3 све нуле полинома $q(x)$. Како је $y_1=x_1+\frac{2x_1}{x_1x_2x_3}=\frac{c-2}{c}\cdot x_1$ и, аналогно, $y_2=\frac{c-2}{c}\cdot x_2$ и $y_3=\frac{c-2}{c}\cdot x_3$, важи

$$\begin{aligned} y_1+y_2+y_3 &= \tfrac{c-2}{c}\cdot(x_1+x_2+x_3)=\tfrac{a(2-c)}{c}\,,\\ y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1 &= \left(\tfrac{c-2}{c}\right)^2\cdot(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=\tfrac{b(c-2)^2}{c^2}\,,\\ y_1y_2y_3 &= \left(\tfrac{c-2}{c}\right)^3\cdot x_1x_2x_3=-\tfrac{(c-2)^3}{c^2}\,,\end{aligned}$$

па је $-c=\frac{a(2-c)}{c}$, $a=\frac{b(c-2)^2}{c^2}$, $-b=\frac{(c-2)^3}{c^2}$. Следи $-c=\frac{a(2-c)}{c}=\frac{2-c}{c}\cdot\frac{b(c-2)^2}{c^2}=-\frac{2-c}{c}\cdot\frac{(c-2)^2}{c^2}\cdot\frac{(c-2)^3}{c^2}=\frac{(c-2)^6}{c^5}$, односно $(c-2)^6=c^6$, а како је $c\in\mathbb{R}$, или је $c-2=c$, што је немогуће, или је $c-2=-c$, тј. $c=1$, а онда је $a=b=-1$.

Са друге стране, ако је $(a,b,c)=(-1,-1,1)$, важи $p(x)=x^3+x^2-x-1=(x+1)(x-1)^2$, па су y_1,y_2,y_3 једнаки $1,1,-1$ (у неком редоследу), а важи и $q(x)=x^3+x^2-x-1=(x+1)(x-1)^2$, тј. $(a,b,c)=(-1,-1,1)$ задовољава наведене услове.

2. Ако су $x,y\in A$, $x\neq y$, онда је $g(f(x))=75-x\neq 75-y=g(f(y))$, па је $f(x)\neq f(y)$, тј. f је инјективна, односно $f(A)$ садржи 74 елемента. Следи, ако је $y\in f(A)$, онда је $y=f(x)$ за тачно једно $x\in A$, па је $g(y)=g(f(x))=75-x$, тј. избором $f(x)$ (произвољне инјективне функције) је $g(x)$ једнозначно одређена на $f(A)$, док на $B\setminus f(A)$ (који садржи $2022-74=1948$ елемената) на основу наведених услова нема ограничења, односно може узимати произвољне вредности из A.

Дакле, $f(x)$ се може изабрати на $2022\cdot 2021\cdot\ldots\cdot 1949$ начина, а вредности $g(x)$ на $B\setminus f(A)$, независно од претходног избора, на 74^{1948} начина, па је број парова са наведеним особинама $2022\cdot 2021\cdot\ldots\cdot 1949\cdot 74^{1948}$.

3. Нека је $f_n(x)=\cos^n x+\cos^n\!\big(x+\frac{2\pi}{3}\big)+\cos^n\!\big(x+\frac{4\pi}{3}\big)$ за $x\in\mathbb{R}$ и $n\in\mathbb{N}$.

Нека $f_n(x)$ не зависи од x. Онда је $f_n(0)=f_n(-\frac{\pi}{3})$, па је $1+2\cdot(-\frac12)^n=(-1)^n+2\cdot(\frac12)^n$. Ако $2\nmid n$, добијена једнакост постаје $2=\frac{4}{2^n}$, па мора бити $n=1$. Ако $2\mid n$, тј. ако је $n=2k$ за неко $k\in\mathbb{N}$, како је $f_n(0)=f_n(-\frac{\pi}{6})$, следи $1+2\cdot\frac{1}{4^k}=1+2\cdot(-\frac12)^{2k}=(\frac{\sqrt3}{2})^{2k}+(-\frac{\sqrt3}{2})^{2k}=2\cdot(\frac34)^k$. Како за $k\geqslant 3$ важи $1+2\cdot\frac{1}{4^k}>1>2\cdot(\frac34)^3\geqslant 2\cdot(\frac34)^k$, мора бити $n\in\{2,4\}$.

Дакле, мора бити $n\in\{1,2,4\}$, а за ове вредности $f_n(x)$ не зависи од x, пошто је

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \cos x+\cos\!\big(x+\tfrac{2\pi}{3}\big)+\cos\!\big(x+\tfrac{4\pi}{3}\big)=2\cos\!\big(x+\tfrac{2\pi}{3}\big)\cos\!\big(-\tfrac{2\pi}{3}\big)+\cos\!\big(x+\tfrac{2\pi}{3}\big)=0,\\ f_2(x) &= \cos^2 x+\cos^2\!\big(x+\tfrac{2\pi}{3}\big)+\cos^2\!\big(x+\tfrac{4\pi}{3}\big)=\tfrac{1+\cos 2x}{2}+\tfrac{1+\cos(2x+\frac{4\pi}{3})}{2}+\tfrac{1+\cos(2x+\frac{8\pi}{3})}{2}\\ &= \tfrac32+\tfrac12\cdot\big(\cos 2x+\cos\!\big(2x+\tfrac{4\pi}{3}\big)+\cos(2x+\tfrac{2\pi}{3})\big)=\tfrac32+\tfrac12\cdot f_1(2x)=\tfrac32\,,\\ \text{и } f_4(x) &= \big(\tfrac{1+\cos 2x}{2}\big)^2+\big(\tfrac{1+\cos(2x+\frac{4\pi}{3})}{2}\big)^2+\big(\tfrac{1+\cos(2x+\frac{8\pi}{3})}{2}\big)^2=\tfrac34+\tfrac12\cdot f_1(2x)+\tfrac14\cdot f_2(2x)=\tfrac98\,.\end{aligned}$$

4. Како је $7^k\equiv 1 \pmod 3$ и $2\cdot 22^n\equiv 2 \pmod 3$, следи $5^m\equiv 2 \pmod 3$, па $2\nmid m$, одакле је $5^m\equiv 5 \pmod 8$. Ако је $n>1$, онда $8\mid 2\cdot 22^n$, па је $(-1)^k\equiv 5 \pmod 8$, што је немогуће. Следи $n=1$, тј. $7^k=5^m+44$, па је $(-1)^k\equiv 5+4\equiv 1 \pmod 8$, тј. $2\mid k$. Ако је $m>1$, онда је $k=2k_1$ и $m=2m_1+1$, где су $k_1,m_1\in\mathbb{N}$, односно $49^{k_1}=5\cdot 25^{m_1}+44$, па је $(-1)^{k_1}\equiv 19 \pmod{25}$, што је немогуће. Следи $m=1$, односно $7^k=5+44=49$, тј. $k=2$.

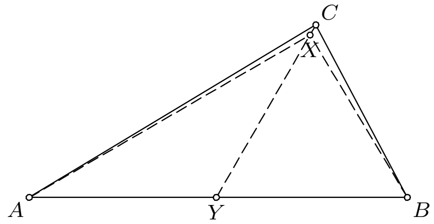
Дакле, једино решење наведене једначине је $(k,m,n)=(2,1,1)$.

5. Важи $A-Y-B$ и $\sphericalangle CYB=\sphericalangle YCA+\sphericalangle CAY=60^\circ$, па је $\sphericalangle BCY=180^\circ-\sphericalangle CYB-\sphericalangle YBC=58^\circ$, $\sphericalangle YBX=\sphericalangle YBC-\sphericalangle XBC=59^\circ$ и $\sphericalangle BXY=180^\circ-\sphericalangle XYB-\sphericalangle YBX=61^\circ$. Применом синусне теореме на $\triangle AYC$ и $\triangle YBC$, редом, следи $\frac{AY}{YC}=\frac{\sin 29^\circ}{\sin 31^\circ}$ и $\frac{YB}{CY}=\frac{\sin 58^\circ}{\sin 62^\circ}$, па је $\frac{AY}{YB}=$

$\frac{\sin 29^\circ \sin 62^\circ}{\sin 31^\circ \sin 58^\circ} = \frac{2\cos 31^\circ}{2\cos 29^\circ} = \frac{\sin 59^\circ}{\sin 61^\circ}$. Применом синусне теореме на $\triangle YBX$ следи $\frac{XY}{YB} = \frac{\sin 59^\circ}{\sin 61^\circ}$. Дакле, важи $\frac{AY}{YB} = \frac{XY}{YB}$, односно $AY = YX$.

Друго решење. Нека је $x = \sphericalangle XAB \in (0^\circ, 31^\circ)$. Применом синусне теореме на $\triangle ABX$, $\triangle BCX$ и $\triangle CAX$, следи $\frac{XA}{BX} = \frac{\sin 59^\circ}{\sin x}$, $\frac{XB}{CX} = \frac{\sin 58^\circ}{\sin 3^\circ}$ и $\frac{XC}{AX} = \frac{\sin(31^\circ - x)}{\sin 29^\circ}$, па је $\sin 59^\circ \sin 58^\circ \sin(31^\circ - x) = \sin x \sin 3^\circ \sin 29^\circ$, односно $L(x) = 2\sin 59^\circ \cos 29^\circ \sin(31^\circ - x) = \sin 3^\circ \sin x = D(x)$.

Како је $2\sin 59^\circ \cos 29^\circ > 0$ и $\sin 3^\circ > 0$ и како $\sin(31^\circ - x)$ опада, а $\sin x$ расте на $(0^\circ, 31^\circ)$, следи да једначина $L(x) = D(x)$ има највише једно решење на $(0^\circ, 31^\circ)$, а како је $L(30^\circ) = 2\sin 59^\circ \cos 29^\circ \sin 1^\circ = \sin 59^\circ \cdot \big(\sin 30^\circ - \sin 28^\circ\big) = \frac{1}{2} \cdot \sin 59^\circ - \frac{1}{2} \cdot \big(\cos 31^\circ - \cos 87^\circ\big) = \frac{1}{2} \cdot \sin 59^\circ - \frac{1}{2} \cdot \sin 59^\circ + \frac{1}{2} \cdot \sin 3^\circ = \sin 3^\circ \sin 30^\circ = D(30^\circ)$, та једначина има тачно једно решење на $(0^\circ, 31^\circ)$ и то $x = 30^\circ$.



Држ–22–4Б5

Следи $\sphericalangle XAY = 30^\circ$, $\sphericalangle YXA = \sphericalangle XYB - \sphericalangle XAY = 30^\circ$, тј. $\triangle XYA$ је једнакокраки, па је $AY = YX$.