

16. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

Београд, 31.5.2022.

1. Доказати да за све позитивне реалне бројеве a, b важи неједнакост

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} + \frac{2ab}{a + b} \geq \frac{a + b}{2} + \sqrt{ab}.$$

Када важи једнакост у овој неједнакости?

2. Нека је I центар уписане кружнице, а A_1 и B_1 редом средишта страница BC и AC датог троугла ABC . Означимо са M и N редом средишта оних лукова AC и BC описане кружнице троугла ABC који садрже преостало теме троугла. Уколико су тачке M, I, N колинеарне, доказати да важи

$$\angle AIB_1 = \angle BIA_1 = 90^\circ.$$

3. Одредити све природне бројеве n који задовољавају следећих 5 услова:

- (1) Број n није дељив ниједним квадратом природног броја већег од 1.
- (2) Број n има само један прост делилац облика $4k + 3$, $k \in \mathbb{N}_0$.
- (3) Ако са $S(n)$ означимо збир цифара броја n , а са $d(n)$ број природних делилаца броја n , тада важи $S(n) + 2 = d(n)$.
- (4) Број n увећан за 3 је квадрат природног броја.
- (5) Број n нема просте факторе који имају 4 или више цифара.

4. У свако поље табле 5×5 уписан је број 0. У једном кораку дозвољено је одабрати произвољно поље табле и увећати за 1 бројеве уписане у том пољу и свим њему суседним пољима (два поља су суседна уколико имају заједничку ивицу). Након коначно много корака, у свим пољима табле уписан је природан број n . Одредити све могуће вредности за n .

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 10 поена.